CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

MMA 2015

UZUPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

miejsce na naklejkę

dysleksja

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM PODSTAWOWY

DATA: **5 maja 2015 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS PRACY: **170 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 24 strony (zadania 1–34). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–25) przenieś na kartę odpowiedzi, zaznaczając je w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz właściwe.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (26–34) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.
9. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
10. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

MMA-P1_1P-152

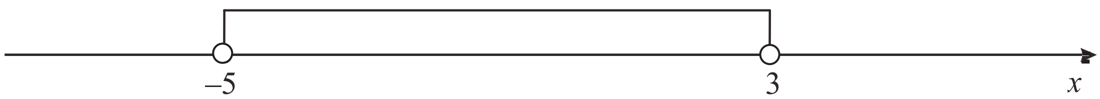
MMA 2015

W zadaniach od 1. do 25. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

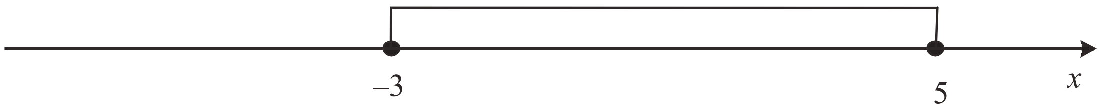
Wskaż rysunek, na którym przedstawiono przedział, będący zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $-4 \le x-1 \le 4$.

A.

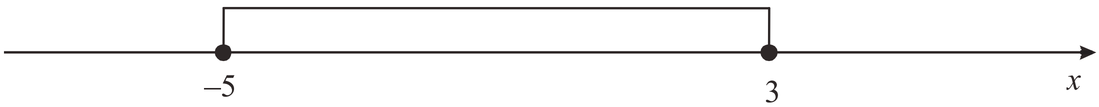


B.

C.



D.



Zadanie 2. (0–1)

Dane są liczby $a=-\frac{1}{27}$, $b=\log_{\frac{1}{4}} 64$, $c=\log_{\frac{1}{3}} 27$. Iloczyn abc jest równy

A. -9 **B.** $-\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 3

Zadanie 3. (0–1)

Kwotę 1000 zł ulokowano w banku na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości 4% w stosunku rocznym. Po zakończeniu lokaty od naliczonych odsetek odprowadzany jest podatek w wysokości 19%. Maksymalna kwota, jaką po upływie roku będzie można wypłacić z banku, jest równa

A. $1000\cdot\left(1-\frac{81}{100}\cdot\frac{4}{100}\right)$ **B.** $1000\cdot\left(1+\frac{19}{100}\cdot\frac{4}{100}\right)$

C. $1000\cdot\left(1+\frac{81}{100}\cdot\frac{4}{100}\right)$ **D.** $1000\cdot\left(1-\frac{19}{100}\cdot\frac{4}{100}\right)$

Zadanie 4. (0–1)

Równość $\frac{m}{5-\sqrt{5}}=\frac{5+\sqrt{5}}{5}$ zachodzi dla

A. $m=5$ **B.** $m=4$ **C.** $m=1$ **D.** $m=-5$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 5. (0–1)

Układ równań $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+0,5y=4 \end{cases}$ opisuje w układzie współrzędnych na płaszczyźnie

A. zbiór pusty.
B. dokładnie jeden punkt.
C. dokładnie dwa różne punkty.
D. zbiór nieskończony.

Zadanie 6. (0–1)

Suma wszystkich pierwiastków równania $(x+3)(x+7)(x-11)=0$ jest równa

A. -1 **B.** 21 **C.** 1 **D.** -21

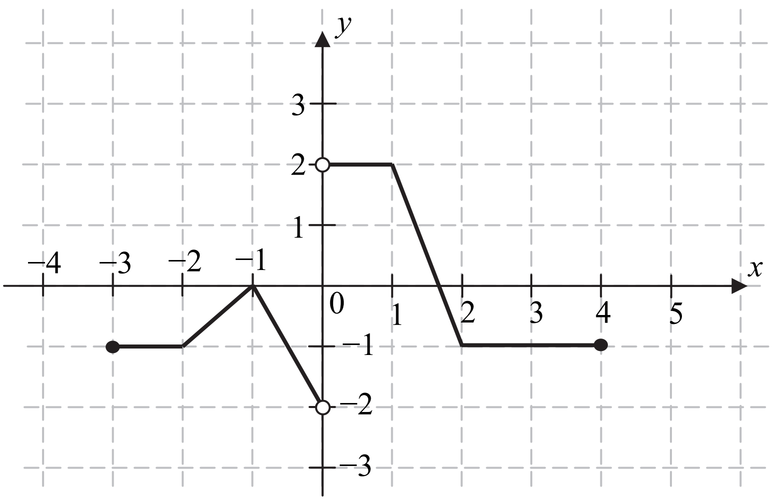
Zadanie 7. (0–1)

Równanie $\frac{x-1}{x+1}=x-1$

A. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x=1$.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x=0$.
C. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x=-1$.
D. ma dokładnie dwa rozwiązania: $x=0$, $x=1$.

Zadanie 8. (0–1)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*.



Zbiorem wartości funkcji f jest

A. $(-2, 2)$ **B.** $\langle -2, 2)$ **C.** $\langle -2, 2\rangle$ **D.** $(-2, 2\rangle$

Zadanie 9. (0–1)

Na wykresie funkcji liniowej określonej wzorem $f(x)=(m-1)x+3$ leży punkt $S=(5,-2)$.
Zatem

A. $m=-1$ **B.** $m=0$ **C.** $m=1$ **D.** $m=2$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 10. (0–1)

Funkcja liniowa f określona wzorem $f(x)=2x+b$ ma takie samo miejsce zerowe, jakie ma funkcja liniowa $g(x)=-3x+4$. Stąd wynika, że

A. $b=4$ **B.** $b=-\frac{3}{2}$ **C.** $b=-\frac{8}{3}$ **D.** $b=\frac{4}{3}$

Zadanie 11. (0–1)

Funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x)=x^2+x+c$. Jeżeli $f(3)=4$, to

A. $f(1)=-6$ **B.** $f(1)=0$ **C.** $f(1)=6$ **D.** $f(1)=18$

Zadanie 12. (0–1)

Ile liczb całkowitych x spełnia nierówność $\frac{2}{7}<\frac{x}{14}<\frac{4}{3}$?

A. 14 **B.** 15 **C.** 16 **D.** 17

Zadanie 13. (0–1)

W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n\geq 1$, spełniony jest warunek $a_4=3a_1$. Iloraz q tego ciągu jest równy

A. $q=\frac{1}{3}$ **B.** $q=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ **C.** $q=\sqrt[3]{3}$ **D.** $q=3$

Zadanie 14. (0–1)

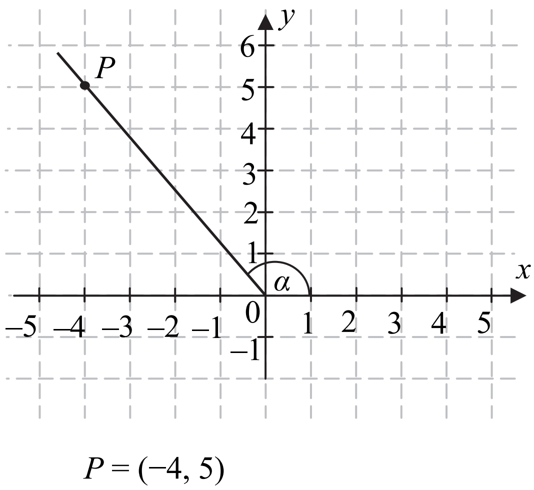
Tangens kąta α zaznaczonego na rysunku jest równy

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $-\frac{4}{5}$

C. -1

D. $-\frac{5}{4}$



$P=(-4, 5)$

Zadanie 15. (0–1)

Jeżeli $0°<\alpha<90°$ oraz $\text{tg}\alpha=2\sin\alpha$, to

A. $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ **B.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\cos\alpha=1$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 16. (0–1)

Miara kąta wpisanego w okrąg jest o $20°$ mniejsza od miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Wynika stąd, że miara kąta wpisanego jest równa

A. $5°$ **B.** $10°$ **C.** $20°$ **D.** $30°$

Zadanie 17. (0–1)

Pole rombu o obwodzie 8 jest równe 1. Kąt ostry tego rombu ma miarę α. Wtedy

A. $14° < \alpha < 15°$ **B.** $29° < \alpha < 30°$ **C.** $60° < \alpha < 61°$ **D.** $75° < \alpha < 76°$

Zadanie 18. (0–1)

Prosta l o równaniu $y = m^2x + 3$ jest równoległa do prostej k o równaniu $y = (4m-4)x - 3$. Zatem

A. $m = 2$ **B.** $m = -2$ **C.** $m = -2-2\sqrt{2}$ **D.** $m = 2+2\sqrt{2}$

Zadanie 19. (0–1)

Proste o równaniach: $y = 2mx - m^2 - 1$ oraz $y = 4m^2x + m^2 + 1$ są prostopadłe dla

A. $m = -\frac{1}{2}$ **B.** $m = \frac{1}{2}$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = 2$

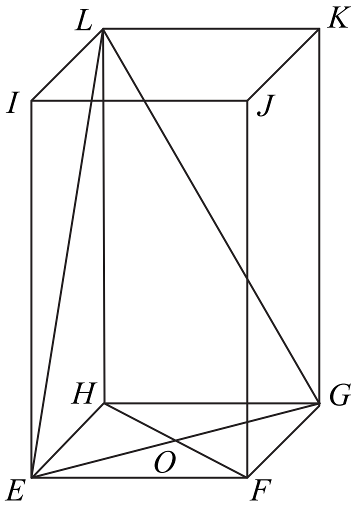
Zadanie 20. (0–1)

Dane są punkty $M = (-2, 1)$ i $N = (-1, 3)$. Punkt K jest środkiem odcinka MN. Obrazem punktu K w symetrii względem początku układu współrzędnych jest punkt

A. $K' = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$ **B.** $K' = \left(2, \frac{3}{2}\right)$ **C.** $K' = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ **D.** $K' = \left(\frac{3}{2}, -2\right)$

Zadanie 21. (0–1)

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym *EFGHIJKL* wierzchołki *E*, *G*, *L* połączono odcinkami (tak jak na rysunku).



Wskaż kąt między wysokością *OL* trójkąta *EGL* i płaszczyzną podstawy tego graniastosłupa.

A. $\sphericalangle HOL$ **B.** $\sphericalangle OGL$ **C.** $\sphericalangle HLO$ **D.** $\sphericalangle OHL$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 22. (0–1)
Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoboczny o boku długości 6. Objętość tego stożka jest równa

A. $27\pi\sqrt{3}$ **B.** $9\pi\sqrt{3}$ **C.** 18π **D.** 6π

Zadanie 23. (0–1)
Każda krawędź graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość równą 8. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe

A. $\frac{8^2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+3\right)$ **B.** $8^2\cdot\sqrt{3}$ **C.** $\frac{8^2\sqrt{6}}{3}$ **D.** $8^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+3\right)$

Zadanie 24. (0–1)
Średnia arytmetyczna zestawu danych:

$$2, 4, 7, 8, 9$$

jest taka sama jak średnia arytmetyczna zestawu danych:

$$2, 4, 7, 8, 9, x.$$

Wynika stąd, że

A. $x=0$ **B.** $x=3$ **C.** $x=5$ **D.** $x=6$

Zadanie 25. (0–1)
W każdym z trzech pojemników znajduje się para kul, z których jedna jest czerwona, a druga – niebieska. Z każdego pojemnika losujemy jedną kulę. Niech p oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie dwie z trzech wylosowanych kul będą czerwone. Wtedy

A. $p=\frac{1}{4}$ **B.** $p=\frac{3}{8}$ **C.** $p=\frac{1}{2}$ **D.** $p=\frac{2}{3}$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 4x > (x+3)(x-2)$.

Odpowiedź: ....

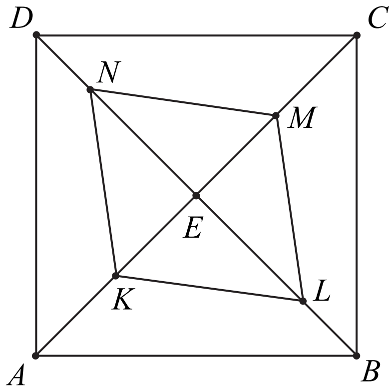
Zadanie 27. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	26.	27.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 28. (0–2)

Dany jest kwadrat $ABCD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkty K i M są środkami odcinków – odpowiednio – AE i EC. Punkty L i N leżą na przekątnej BD tak, że $|BL| = \frac{1}{3}|BE|$ i $|DN| = \frac{1}{3}|DE|$ (zobacz rysunek). Wykaż, że stosunek pola czworokąta $KLMN$ do pola kwadratu $ABCD$ jest równy $1:3$.



Zadanie 29. (0–2)

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $f\left(x\right)=x^2-6x+3$ w przedziale $\left\langle 0,\ 4\right\rangle$.

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	28.	29.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 30. (0–2)

W układzie współrzędnych są dane punkty $A=(-43,-12)$, $B=(50,19)$. Prosta AB przecina oś Ox w punkcie P. Oblicz pierwszą współrzędną punktu P.

Odpowiedź: ....

Zadanie 31. (0–2)

Jeżeli do licznika i do mianownika nieskracalnego dodatniego ułamka dodamy połowę jego licznika, to otrzymamy $\frac{4}{7}$, a jeżeli do licznika i do mianownika dodamy 1, to otrzymamy $\frac{1}{2}$.

Wyznacz ten ułamek.

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	30.	31.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 32. (0–4)

Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Odpowiedź: ....

<table>
<tr><td rowspan="3">Wypełnia egzaminator</td><td>Nr zadania</td><td>32.</td></tr>
<tr><td>Maks. liczba pkt</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Uzyskana liczba pkt</td><td></td></tr>
</table>

Zadanie 33. (0–4)

Wśród 115 osób przeprowadzono badania ankietowe, związane z zakupami w pewnym kiosku. W poniższej tabeli przedstawiono informacje o tym, ile osób kupiło bilety tramwajowe ulgowe oraz ile osób kupiło bilety tramwajowe normalne.

Rodzaj kupionych biletów	Liczba osób
ulgowe	76
normalne	41

Uwaga! 27 osób spośród ankietowanych kupiło oba rodzaje biletów.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że osoba losowo wybrana spośród ankietowanych nie kupiła żadnego biletu. Wynik przedstaw w formie nieskracalnego ułamka.

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	33.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 34. (0–5)

W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 187. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu tego ciągu, jest równa 12. Wyrazy a_1, a_3, a_k ciągu (a_n), w podanej kolejności, tworzą nowy ciąg – trzywyrazowy ciąg geometryczny (b_n). Oblicz k.

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	34.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2014/2015

FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA")

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-P1

MAJ 2015

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0−1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)	
		Wersja I	**Wersja II**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej (1.8).	**C**	**D**

Zadanie 2. (0−1)

		Wersja I	**Wersja II**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.6).	**B**	**C**

Zadanie 3. (0−1)

		Wersja I	**Wersja II**
III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (1.9).	**C**	**A**

Zadanie 4. (0−1)

		Wersja I	**Wersja II**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).	**B**	**C**

Zadanie 5. (0−1)

		Wersja I	**Wersja II**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi (3.2).	**B**	**C**

Zadanie 6. (0−1)

		Wersja I	**Wersja II**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$ (3.7).	**C**	**D**

Zadanie 7. (0−1)

<table>
<tr><td rowspan="2">II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</td><td rowspan="2">3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$, $\frac{x+1}{x}=2x$ (3.8).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr>
<tr><td>D</td><td>A</td></tr>
</table>

Zadanie 8. (0−1)

<table>
<tr><td rowspan="2">II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</td><td rowspan="2">4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji (4.3).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr>
<tr><td>D</td><td>A</td></tr>
</table>

Zadanie 9. (0−1)

<table>
<tr><td rowspan="2">II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</td><td rowspan="2">4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie (4.6).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr>
<tr><td>B</td><td>D</td></tr>
</table>

Zadanie 10. (0−1)

<table>
<tr><td rowspan="2">I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.</td><td rowspan="2">4. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej (4.7).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr>
<tr><td>C</td><td>A</td></tr>
</table>

Zadanie 11. (0−1)

<table>
<tr><td rowspan="2">II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</td><td rowspan="2">4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie (4.9).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr>
<tr><td>A</td><td>D</td></tr>
</table>

Zadanie 12. (0−1)

<table>
<tr><td rowspan="2">II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</td><td rowspan="2">3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą (3.3).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr>
<tr><td>A</td><td>D</td></tr>
</table>

Zadanie 13. (0−1)

<table>
<tr><td rowspan="2">III. Modelowanie matematyczne.</td><td rowspan="2">5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr>
<tr><td>C</td><td>D</td></tr>
</table>

Zadanie 14. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180° (6.1).	**Wersja I**	**Wersja II**
		D	**A**

Zadanie 15. (0−1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$ oraz $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$ (6.4).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**B**

Zadanie 16. (0−1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym (7.1).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**B**

Zadanie 17. (0−1)

III. Modelowanie matematyczne.	7. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi (7.4).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**B**

Zadanie 18. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.2).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**B**

Zadanie 19. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.2).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**D**

Zadanie 20. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka i znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w symetrii środkowej względem początku układu (8.5, 8.7).	**Wersja I**	**Wersja II**
		D	**B**

Zadanie 21. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (9.2).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**B**

Zadanie 22. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6).	**Wersja I**	**Wersja II**
		B	**C**

Zadanie 23. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6).	**Wersja I**	**Wersja II**
		D	**A**

Zadanie 24. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (10.1).	**Wersja I**	**Wersja II**
		D	**C**

Zadanie 25. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).	**Wersja I**	**Wersja II**
		B	**A**

Zadanie 26. (0–2)
Rozwiąż nierówność $2x^2 - 4x > (x+3)(x-2)$.

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą (3.5).

Rozwiązanie
Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap, wyznaczenie pierwiastków trójmianu, może być realizowany na 2 sposoby:

I sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)
Zapisujemy nierówność w postaci $x^2 - 5x + 6 > 0$ i znajdujemy pierwiastki trójmianu $x^2 - 5x + 6$

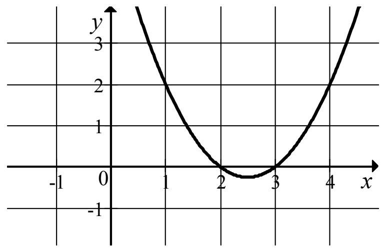
- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
  $\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$, stąd $x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ oraz $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:
  $x_1 \cdot x_2 = 6$ oraz $x_1 + x_2 = 5$, stąd $x_1 = 2$ oraz $x_2 = 3$

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu, lub zaznaczając je na wykresie (wystarczy szkic wykresu, oś liczbowa itp.):
  $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ lub $(x-2)[2x-(x+3)]$ lub $(x-2)(x-3)$
  lub



II sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)
Wyznaczamy postać kanoniczną trójmianu kwadratowego $x^2 - 5x + 6$ i zapisujemy nierówność w postaci, np. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} > 0$, a następnie

- przekształcamy nierówność tak, aby jej lewa strona była zapisana w postaci iloczynowej
  $\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}\right] \cdot \left[\left(x-\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}\right] > 0$,
  $\left(x-\frac{6}{2}\right)\left(x-\frac{4}{2}\right) > 0$,

albo

- przekształcamy nierówność do postaci równoważnej, korzystając z własności wartości bezwzględnej
  $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}$,

$\left|x-\frac{5}{2}\right|>\frac{1}{2}$.

Drugi etap rozwiązania:
Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, 2)\cup(3, +\infty)$ lub $x\in(-\infty, 2)\cup(3, +\infty)$.

Schemat oceniania
Zdający otrzymuje..1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1=2$, $x_2=3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x)=x^2-5x+6$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $(x-2)(x-3)$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zapisze nierówność $\left|x-\frac{5}{2}\right|>\frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap rozwiązania zadania popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np.: $x_1+x_2=-\frac{5}{2}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - błędnie zapisze nierówność, np. $\left|x+\frac{5}{2}\right|<\frac{1}{2}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności.

Zdający otrzymuje..2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, 2)\cup(3, +\infty)$ lub $x\in(-\infty, 2)\cup(3, +\infty)$ lub ($x<2$ lub $x>3$),

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x<2$, $x>3$,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

Uwagi

1. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez $x-2$ bez stosownego założenia, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez $x-2$, rozważając dwa przypadki $x-2>0$ oraz $x-2<0$, rozwiąże nierówność w każdym z tych przypadków, ale nie rozważy przypadku $x-2=0$, to otrzymuje **1 punkt**.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Akceptujemy zapis przedziału nieuwzględniający porządku liczb na osi liczbowej, np.: $(2, -\infty)$.
2. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ i zapisze, np. $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)

Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dla dowolnej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$.

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).

I sposób rozwiązania

Nierówność $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$ przekształcamy w sposób równoważny

$y^2 + 4x^2 - 8xy + 4y^2 \geq 0$,

$y^2 + (2x - 2y)^2 \geq 0$.

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y, gdyż kwadrat każdej liczby jest nieujemny i suma kwadratów liczb nieujemnych również jest nieujemna.
To kończy dowód.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**

gdy zapisze nierówność w postaci równoważnej $y^2 + (2x - 2y)^2 \geq 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**

gdy przeprowadzi pełny dowód.

II sposób rozwiązania

Nierówność $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$ możemy potraktować jak nierówność kwadratową z niewiadomą x lub – analogicznie – z niewiadomą y. Wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie nierówności jest równy

$\Delta = (-8y)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (5y^2) = -16y^2 \leq 0$.

Stąd i z faktu, że współczynnik przy x^2 trójmianu $f(x) = 4x^2 - 8xy + 5y^2$ jest dodatni wynika, że trójmian ten przyjmuje tylko wartości nieujemne. To kończy dowód.

Schemat oceniania II sposobu

Zdający otrzymuje .... **1 p.**

gdy wyznaczy wyróżnik trójmianu $f(x) = 4x^2 - 8xy + 5y^2$: $\Delta = -16y^2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje..2 p.
gdy wyznaczy wyróżnik trójmianu $f(x)=4x^2-8xy+5y^2$, zapisze, że jest on niedodatni i wyciągnie wniosek, że trójmian przyjmuje tylko wartości nieujemne.

III sposób rozwiązania
Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^2+y^2\geq 2xy$. Stąd wynika, że prawdziwa jest nierówność
$4x^2+4y^2\geq 8xy$, czyli $4x^2-8xy+4y^2\geq 0$.
Zatem, dla dowolnych liczb x, y mamy
$4x^2-8xy+5y^2\geq 4x^2-8xy+4y^2\geq 0$.
To kończy dowód.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje..1 p.
gdy zapisze, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwe są nierówności $4x^2-8xy+5y^2\geq 4x^2-8xy+4y^2$ oraz $4x^2+4y^2\geq 8xy$ (lub $x^2+y^2\geq 2xy$).
Zdający otrzymuje..2 p.
gdy przeprowadzi pełny dowód.

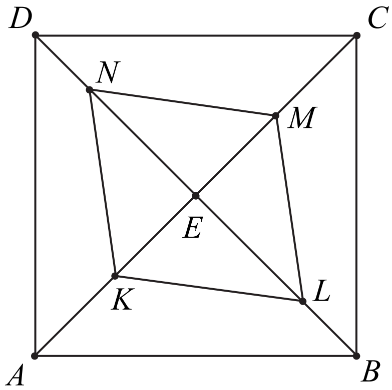
IV sposób rozwiązania
Gdy co najmniej jedna z liczb x, y jest równa 0, to nierówność $4x^2-8xy+5y^2\geq 0$ jest prawdziwa, gdyż suma trzech liczb, z których co najmniej dwie są równe 0, a trzecia nieujemna, jest nieujemna.
Gdy liczby x, y są przeciwnych znaków, to $xy<0$, więc $-8xy>0$. Zatem nierówność $4x^2-8xy+5y^2\geq 0$ jest prawdziwa, gdyż lewa jej strona jest sumą trzech liczb dodatnich.
Pozostaje wykazać prawdziwość nierówności w przypadku, gdy liczby x, y są tego samego znaku.
Zauważmy najpierw, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność
$\left(2x-\sqrt{5}y\right)^2\geq 0$, czyli $4x^2-4\sqrt{5}xy+5y^2\geq 0$.
Wykażemy teraz prawdziwość nierówności
$4x^2-8xy+5y^2\geq 4x^2-4\sqrt{5}xy+5y^2$,
równoważnie
$-8xy\geq -4\sqrt{5}xy$,
$xy\leq \frac{\sqrt{5}}{2}xy$.
Skoro x i y są tego samego znaku, to $xy>0$, więc dzieląc obie strony nierówności przez xy, otrzymujemy nierówność równoważną $1\leq\frac{\sqrt{5}}{2}$, co jest prawdą. To kończy dowód.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje..1 p.
gdy wykaże prawdziwość nierówności w przypadku, gdy co najmniej jedna z liczb x, y jest równa 0 oraz w przypadku, gdy liczby x, y są przeciwnych znaków, a w przypadku, gdy x, y są tego samego znaku zauważy, że prawdziwa jest nierówność $\left(2x-\sqrt{5}y\right)^2\geq 0$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełny dowód.

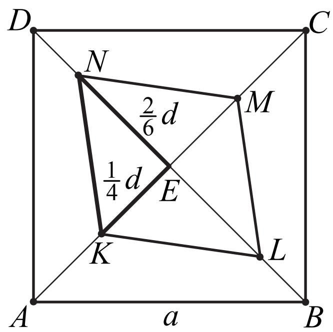
Uwaga
Gdy zdający sprawdza jedynie prawdziwość nierówności dla konkretnych liczb x i y, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 28. (0–2)
Dany jest kwadrat *ABCD*. Przekątne *AC* i *BD* przecinają się w punkcie *E*. Punkty *K* i *M* są środkami odcinków – odpowiednio – *AE* i *EC*. Punkty *L* i *N* leżą na przekątnej *BD* tak, że $|BL| = \frac{1}{3}|BE|$ i $|DN| = \frac{1}{3}|DE|$ (zobacz rysunek). Wykaż, że stosunek pola czworokąta *KLMN* do pola kwadratu *ABCD* jest równy $1:3$.



V. Rozumowanie i argumentacja.	G10. Figury płaskie. Zdający oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów. (G10.9).

I sposób rozwiązania



Przekątne w kwadracie *ABCD* są równe, więc $|AC| = |BD| = d = a\sqrt{2}$.

Pole kwadratu *ABCD* jest równe $P_{ABCD} = a^2$. Czworokąt *KLMN* składa się z czterech trójkątów prostokątnych przystających do trójkąta *KEN*. Pole każdego z nich jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}d\right) \cdot \left(\frac{2}{6}d\right) = \frac{1}{24}d^2 = \frac{1}{24}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{24} \cdot 2a^2 = \frac{1}{12}a^2.$$

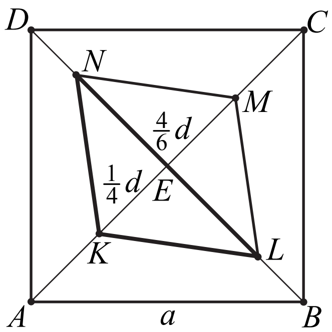
Zatem pole czworokąta *KLMN* jest równe

$$P_{KLMN} = 4 \cdot \frac{1}{12} a^2 = \frac{1}{3} a^2 .$$

Stąd

$$\frac{P_{KLMN}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} a^2}{a^2} = \frac{1}{3} .$$

II sposób rozwiązania



Przekątne w kwadracie *ABCD* są równe, więc $|AC| = |BD| = d = a\sqrt{2}$.

Pole kwadratu *ABCD* jest równe $P_{ABCD} = a^2$. Czworokąt *KLMN* składa się z dwóch trójkątów przystających do trójkąta *KLN*. Pole każdego z nich jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{6} d\right) \cdot \left(\frac{1}{4} d\right) = \frac{1}{12} d^2 = \frac{1}{12}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{12} \cdot 2a^2 = \frac{1}{6} a^2 .$$

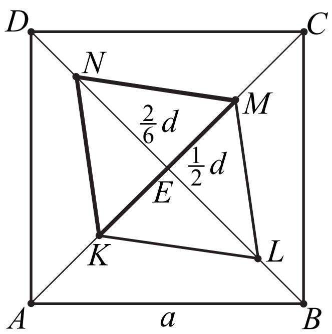
Zatem pole czworokąta *KLMN* jest równe

$$P_{KLMN} = 2 \cdot \frac{1}{6} a^2 = \frac{1}{3} a^2 .$$

Stąd

$$\frac{P_{KLMN}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} a^2}{a^2} = \frac{1}{3} .$$

III sposób rozwiązania



Przekątne w kwadracie *ABCD* są równe, więc $|AC| = |BD| = d = a\sqrt{2}$.

Pole kwadratu $ABCD$ jest równe $P_{ABCD} = a^2$. Czworokąt $KLMN$ składa się z dwóch trójkątów przystających do trójkąta KMN. Pole każdego z nich jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} d \right) \cdot \left(\frac{2}{6} d \right) = \frac{1}{12} d^2 = \frac{1}{12} \left(a\sqrt{2} \right)^2 = \frac{1}{12} \cdot 2a^2 = \frac{1}{6} a^2 .$$

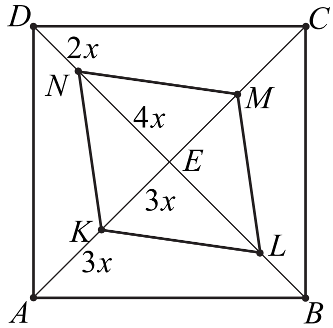
Zatem pole czworokąta $KLMN$ jest równe

$$P_{KLMN} = 2 \cdot \frac{1}{6} a^2 = \frac{1}{3} a^2 .$$

Stąd

$$\frac{P_{KLMN}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} a^2}{a^2} = \frac{1}{3} .$$

IV sposób rozwiązania



Ponieważ przekątne w kwadracie są równe, więc $|AE| = |ED|$. Niech $|AE| = |ED| = 6x$.

Wtedy

$$|AK| = |KE| = |EM| = |MC| = 3x ,\ |DN| = |LB| = 2x \text{ oraz } |NE| = |EL| = 4x .$$

Stąd

$$|KM| = |KE| + |EM| = 6x \text{ oraz } |NL| = |NE| + |EL| = 8x .$$

Pole kwadratu $ABCD$ jest równe

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot 12x \cdot 12x = 72x^2 .$$

Pole czworokąta $KLMN$ jest równe

$$P_{KLMN} = \frac{1}{2} |KM| \cdot |NL| = \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot 8x = 24x^2 .$$

Stąd

$$\frac{P_{KLMN}}{P_{ABCD}} = \frac{24x^2}{72x^2} = \frac{1}{3} .$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

- gdy wyznaczy pole jednego z trójkątów: *KLE*, *LME*, *MNE*, *NKE* ($P=\frac{1}{12}a^2$)

albo

- gdy wyznaczy pole jednego z trójkątów: *NLM*, *LNK* ($P=\frac{1}{6}a^2$)

albo

- gdy wyznaczy pole jednego z trójkątów: *KMN*, *KLM* ($P=\frac{1}{6}a^2$)

albo

- gdy wyznaczy pole czworokąta *KLMN* w zależności od jego przekątnych, np.

  $$P_{KLMN}=\frac{1}{2}|KM|\cdot|LN|=\frac{1}{2}\cdot 6x\cdot 8x=24x^2$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy wykaże, że $\frac{P_{KLMN}}{P_{ABCD}}=\frac{1}{3}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający przy wyznaczaniu pola kwadratu i pola czworokąta *KLMN* przyjmuje konkretne wartości liczbowe bez stosownego komentarza i rozwiązuje zadanie do końca, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający przy wyznaczaniu pól trójkątów lub pól czworokątów o prostopadłych przekątnych pomija współczynnik $\frac{1}{2}$, otrzymując poprawny stosunek pola czworokąta *KLMN* do pola kwadratu *ABCD*, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający w swoim rozumowaniu wykorzystuje tezę, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 29. (0–2)
Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $f(x)=x^2-6x+3$ w przedziale $\langle 0, 4\rangle$.

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym (4.11).

Rozwiązanie
Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli o równaniu $y=x^2-6x+3$: $x_w=\frac{6}{2}=3$. Argument $x_w=3$ należy do przedziału $\langle 0, 4\rangle$, więc najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle 0, 4\rangle$ jest $f(3)=-6$. Obliczamy wartości funkcji f na końcach przedziału $\langle 0, 4\rangle$:
$f(0)=3$ oraz $f(4)=-5$.
Największą wartością jaką przyjmuje funkcja f w przedziale $\langle 0, 4\rangle$ jest $f(0)=3$.

Schemat oceniania
Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy
- obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli $x_w=3$ i stwierdzi, że $x_w\in\langle 0, 4\rangle$,

albo
- obliczy wartości funkcji f na końcach przedziału $\langle 0, 4\rangle$: $f(0)=3$ oraz $f(4)=-5$.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy zapisze odpowiedź: najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle 0, 4\rangle$ jest równa $f(3)=-6$, a największa wartość funkcji w tym przedziale jest równa $f(0)=3$.

Uwagi
1. Jeżeli zdający obliczy jedynie trzy wartości funkcji: $f(0)=3$, $f(3)=-6$ i $f(4)=-5$ oraz sformułuje odpowiedź: największa wartość funkcji w przedziale $\langle 0, 4\rangle$ jest równa 3, a najmniejsza wartość funkcji jest równa -6, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający obliczy tylko współrzędne wierzchołka paraboli $x_w=3$, $f(3)=-6$, ale nie zapisze, że $x_w\in\langle 0,4\rangle$, to otrzymuje **0 punktów.**

Zadanie 30. (0–2)

W układzie współrzędnych są dane punkty $A=(-43,-12)$, $B=(50,19)$. Prosta AB przecina oś Ox w punkcie P. Oblicz pierwszą współrzędną punktu P.

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty. (8.1).

I sposób rozwiązania

Wyznaczamy równanie prostej AB

$y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ lub $x-3y+7=0$.

Pierwsza współrzędna punktu P jest miejscem zerowym funkcji liniowej określonej wzorem $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$.

Rozwiązujemy zatem równanie

$\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}=0$.

Stąd $x=-7$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy wyznaczy równanie prostej AB, np. w postaci $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

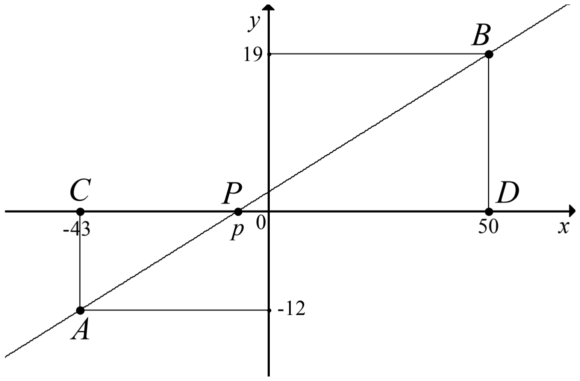
gdy obliczy pierwszą współrzędną punktu *P*: $x=-7$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający przy wyznaczaniu równania prostej *AB*, popełni błąd rzeczowy, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej *AB*, popełniając błędy rachunkowe (np. zapisze $(19-12)(x-50)-(50-43)(y-19)=0$) i konsekwentnie obliczy pierwszą współrzędną punktu *P*, to otrzymuje **1 punkt**.

II sposób rozwiązania

Niech $P=(p,0)$ będzie punktem przecięcia prostej AB z osią Ox układu współrzędnych, a punkty C i D będą rzutami prostokątnymi punktów odpowiednio A i B na tę oś.



Wtedy $C=(-43,0)$ i $D=(50,0)$. Trójkąty PAC i PBD są podobne (oba są prostokątne, a ich kąty ostre przy wierzchołku P są równe). Zatem

$\frac{|PD|}{|BD|}=\frac{|PC|}{|AC|}$, czyli $\frac{50-p}{19}=\frac{p-(-43)}{12}$.

Stąd

$12(50-p)=19(p+43)$,

$600-12p=19p+817$,

$-31p=217$,

$p=-7$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze równanie, w którym niewiadomą jest pierwsza współrzędna punktu P, np.:

$\frac{50-p}{19}=\frac{p-(-43)}{12}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy pierwszą współrzędną punktu P: $p=-7$.

<u>Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki</u>

Jeżeli zdający obliczy pierwszą współrzędną punktu P, zapisując np. $x=-7$, ale popełni błąd formułując odpowiedź, np. $P=(7,0)$, $P=(0,-7)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 31. (0–2)
Jeżeli do licznika i do mianownika nieskracalnego dodatniego ułamka dodamy połowę jego licznika, to otrzymamy $\frac{4}{7}$, a jeżeli do licznika i do mianownika dodamy 1, to otrzymamy $\frac{1}{2}$. Wyznacz ten ułamek.

III. Modelowanie matematyczne.	G7. Równania. Zdający za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym, a także rozwiązuje układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi (G7.7, G7.6).

I sposób rozwiązania
Niech x i y oznaczają odpowiednio licznik i mianownik szukanego ułamka nieskracalnego. Z treści zadania otrzymujemy układ równań

$$\frac{x+\frac{1}{2}x}{y+\frac{1}{2}x}=\frac{4}{7} \text{ oraz } \frac{x+1}{y+1}=\frac{1}{2},$$

$$7\cdot\frac{3}{2}x=4\left(y+\frac{1}{2}x\right) \text{ oraz } 2(x+1)=y+1,$$

$$\frac{21}{2}x=4y+2x \text{ oraz } 2x+1=y.$$

Stąd

$$\frac{17}{2}x=4(2x+1),$$

$$17x=16x+8,$$

$x=8$, więc $y=2\cdot 8+1=17$.

Zatem szukany ułamek to $\frac{8}{17}$. Jest to ułamek nieskracalny.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje ....1 p.
gdy

- zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi, np.: $\frac{x+\frac{1}{2}x}{y+\frac{1}{2}x}=\frac{4}{7}$ i $\frac{x+1}{y+1}=\frac{1}{2}$

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $\frac{17}{2}x=4(2x+1)$.

Zdający otrzymuje ....2 p.
gdy wyznaczy szukany ułamek: $\frac{8}{17}$.

II sposób rozwiązania
Niech x i y oznaczają odpowiednio licznik i mianownik szukanego ułamka nieskracalnego. Z treści zadania otrzymujemy równanie

$$\frac{x+\frac{1}{2}x}{y+\frac{1}{2}x}=\frac{4}{7},$$

$$\frac{\frac{3}{2}x}{y+\frac{1}{2}x}=\frac{4}{7},$$

$$\frac{21}{2}x=4y+2x,$$

$$\frac{17}{2}x=4y.$$

Stąd

$$\frac{x}{y}=\frac{8}{17}.$$

Otrzymany ułamek jest nieskracalny oraz $\frac{x+1}{y+1}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$.

Stąd wynika, że $\frac{8}{17}$ to jedyny szukany ułamek.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze równanie z dwiema niewiadomymi: $\frac{x+\frac{1}{2}x}{y+\frac{1}{2}x}=\frac{4}{7}$ i doprowadzi je postaci $\frac{x}{y}=\frac{8}{17}$

i na tym zakończy

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy zapisze równanie z dwiema niewiadomymi: $\frac{x+\frac{1}{2}x}{y+\frac{1}{2}x}=\frac{4}{7}$, doprowadzi je postaci $\frac{x}{y}=\frac{8}{17}$

i sprawdzi, że ułamek ten spełnia drugi z warunków podanych w treści zadania: $\frac{x+1}{y+1}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$.

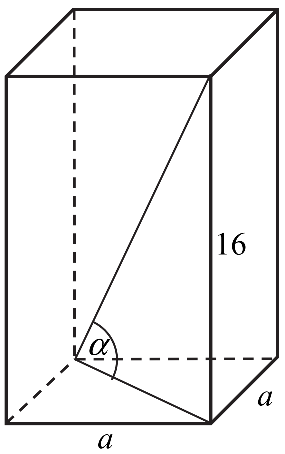
<u>Uwagi:</u>

1. Jeżeli zdający od razu poda ułamek $\frac{8}{17}$ i nie sprawdzi, że $\frac{8+1}{17+1}=\frac{1}{2}$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający od razu poda ułamek $\frac{8}{17}$ i sprawdzi, że spełnia on drugi z warunków podanych w treści zadania $\frac{8+1}{17+1}=\frac{1}{2}$, to otrzymuje **1 punkt.**

Zadanie 32. (0–4)
Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6).

I sposób rozwiązania
Niech a oznacza długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa i niech α będzie kątem nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy (zobacz rysunek).



Ponieważ $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, więc kąt α jest ostry oraz $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Stąd wynika, że $\text{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

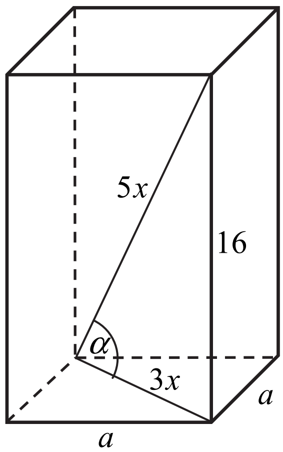
Z drugiej strony $\text{tg}\alpha = \frac{16}{a\sqrt{2}}$. Obliczamy długość krawędzi podstawy graniastosłupa. Rozwiązujemy równanie:

$\frac{16}{a\sqrt{2}} = \frac{4}{3}$, skąd $a = 6\sqrt{2}$.

Szukane pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:

$$P_c = 2\cdot\left(6\sqrt{2}\right)^2 + 4\cdot 6\sqrt{2}\cdot 16 = 144 + 384\sqrt{2} = 48\left(3+8\sqrt{2}\right).$$

II sposób rozwiązania
Niech a oznacza długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, α – kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy oraz niech przekątna podstawy graniastosłupa ma długość $3x$, a przekątna graniastosłupa $5x$ (zobacz rysunek).



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie

$(3x)^2 + 16^2 = (5x)^2$,

$9x^2 + 256 = 25x^2$,

$256 = 16x^2$,

$16 = x^2$.

Stąd $x = 4$. Zatem przekątna podstawy graniastosłupa ma długość $3x = 3 \cdot 4 = 12$.
Obliczamy długość krawędzi podstawy graniastosłupa:

$a\sqrt{2} = 12$, skąd $a = 6\sqrt{2}$.

Szukane pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:

$P_c = 2 \cdot \left(6\sqrt{2}\right)^2 + 4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 16 = 144 + 384\sqrt{2} = 48\left(3 + 8\sqrt{2}\right)$.

Uwaga

Możemy również zauważyć, że trójkąt prostokątny o kącie ostrym α takim, że $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ jest podobny do trójkąta pitagorejskiego o bokach długości 3, 4 i 5. Skala tego podobieństwa jest równa $x = \frac{16}{4} = 4$. W rezultacie szukane pole P_c powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe $x^2 P_m$, gdzie P_m to pole powierzchni całkowitej graniastosłupa, którego przekątna ma długość 5, a przekątna podstawy długość 3. Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa jest równa $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, więc $P_m = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot 4 = 9 + 24\sqrt{2}$.

Zatem $P_c = 4^2 \cdot P_m = 16\left(9 + 24\sqrt{2}\right) = 48\left(3 + 8\sqrt{2}\right)$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający:

- zapisze, że $\mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{3}$

albo

- zapisze równanie, z którego można obliczyć skalę x podobieństwa trójkąta o bokach długości 3, 4 i 5 do trójkąta o przyprostokątnej długości 16 leżącej naprzeciw kąta α, np. $(3x)^2 + 16^2 = (5x)^2$

albo

- poda skalę x podobieństwa trójkąta o bokach długości 3, 4 i 5 do trójkąta o przyprostokątnej długości 16 leżącej naprzeciw kąta α, $x = 4$

albo

- zaznaczy na rysunku kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy

albo

- zapisze, że długość d przekątnej graniastosłupa jest równa 20

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający:

- obliczy długość e przekątnej podstawy tego graniastosłupa $e = 12$

albo

- zapisze równanie, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, np. $16^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{5a\sqrt{2}}{3}\right)^2$

$16^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 20^2$ lub $\frac{16}{a\sqrt{2}} = \frac{4}{3}$

albo

- zapisze układ równań, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, np.

  $$\begin{cases} \frac{a\sqrt{2}}{d} = \frac{3}{5} \\ \left(a\sqrt{2}\right)^2 + 16^2 = d^2 \end{cases}$$

  gdzie d oznacza długość przekątnej tego graniastosłupa

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający obliczy długość krawędzi podstawy graniastosłupa: $a = 6\sqrt{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający obliczy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa: $P_c = 48\left(3 + 8\sqrt{2}\right)$.

Uwagi

1. Akceptujemy sytuację, w której zdający wprowadza do rozwiązania poprawne przybliżenia dziesiętne liczb rzeczywistych.
2. Jeżeli zdający przyjmie miarę kąta nachylenia, która nie wynika z treści zadania (np. $\alpha = 30°$), i w rozwiązaniu z tego korzysta, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający błędnie zaznaczy na rysunku podany kąt i korzysta z tego kąta, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający zapisze, że $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ i korzysta z tej równości, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

5. Jeżeli zdający zapisze błędnie, że $e = a\sqrt{3}$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Zadanie 33. (0–4)

Wśród 115 osób przeprowadzono badania ankietowe, związane z zakupami w pewnym kiosku. W poniższej tabeli przedstawiono informacje o tym, ile osób kupiło bilety tramwajowe ulgowe oraz ile osób kupiło bilety tramwajowe normalne.

Rodzaj kupionych biletów	Liczba osób
ulgowe	76
normalne	41

Uwaga! 27 osób spośród ankietowanych kupiło oba rodzaje biletów.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że osoba losowo wybrana spośród ankietowanych nie kupiła żadnego biletu. Wynik przedstaw w formie nieskracalnego ułamka.

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).

I sposób rozwiązania

Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która kupiła bilet ulgowy,
B – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która kupiła bilet normalny,
C – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która nie kupiła żadnego z wymienionych biletów.

Ankietę przeprowadzono wśród 115 osób, zatem $|\Omega| = 115$.

Ponieważ wśród badanych występują osoby, które kupiły bilety obu rodzajów, więc
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

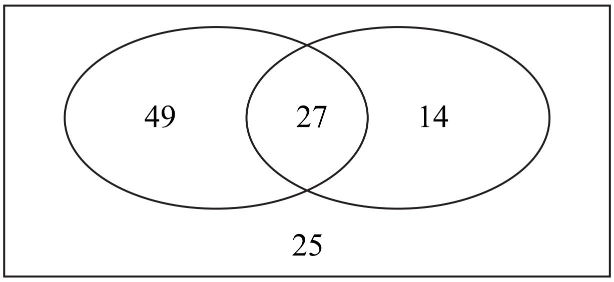
Stąd $|A \cup B| = 76 + 41 - 27 = 90$.

Zatem $|C| = |\Omega| - |A \cup B| = 25$, więc

$$P(C) = \frac{25}{115} = \frac{5}{23}$$

Odp. Prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że losowo wybrana spośród badanych osoba nie zakupiła żadnego z wymienionych biletów jest równe $\frac{5}{23}$.

II sposób rozwiązania
Oznaczmy:
C – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która nie kupiła żadnego biletu.



Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 115$.

Liczba wszystkich osób, które kupiły co najmniej jeden bilet jest równa $49 + 27 + 14 = 90$.

Zatem $|C| = 115 - 90 = 25$.

Stąd $P(C) = \frac{25}{115} = \frac{5}{23}$.

Odp. Prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że losowo wybrana spośród badanych osoba nie zakupiła żadnego z wymienionych biletów jest równe $\frac{5}{23}$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zdający:
- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 115$

albo
- obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły tylko bilety ulgowe: 49

albo
- obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły tylko bilety normalne: 14

albo
- obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły co najmniej jeden bilet: 90.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający:
- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły tylko bilety ulgowe: $|\Omega| = 115$, 49

albo
- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły tylko bilety normalne: $|\Omega| = 115$, 14

albo
- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły co najmniej jeden bilet: $|\Omega| = 115$, 90

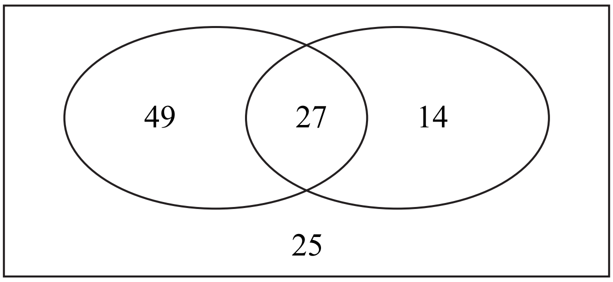
albo
- obliczy, ile jest wszystkich osób, które nie kupiły żadnego biletu: 25.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz obliczy, ile jest wszystkich osób, które nie kupiły żadnego biletu: $|\Omega| = 115$, 25.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający obliczy prawdopodobieństwo wylosowania osoby, która nie kupiła żadnego biletu i zapisze je w postaci ułamka nieskracalnego: $\frac{5}{23}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(C) > 1$ lub $P(C) < 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający poda tylko wynik końcowy $P(C) = \frac{5}{23}$ lub $P(C) = \frac{25}{115}$, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający obliczy $P(C) = \frac{25}{115}$ i nie przedstawi wyniku w postaci ułamka nieskracalnego, to otrzymuje **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu $|A \cup B|$ lub $|C|$, i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
5. Jeżeli zdający sporządził diagram, na którym zapisał liczby 49, 27, 14 i 25,



i na tym zakończył, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 34. (0–5)
W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 187. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu tego ciągu, jest równa 12. Wyrazy a_1, a_3, a_k ciągu (a_n), w podanej kolejności, tworzą nowy ciąg – trzywyrazowy ciąg geometryczny (b_n). Oblicz k.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.3, 5.4).

Rozwiązanie
Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy równanie:

$$\frac{2a_1+10r}{2}\cdot 11=187,$$

$$(a_1+5r)\cdot 11=187,$$

$$a_1+5r=17.$$

Korzystamy z informacji o średniej arytmetycznej trzech wyrazów i zapisujemy równanie:

$$\frac{a_1+a_1+2r+a_1+8r}{3}=12,$$

$$\frac{3a_1+10r}{3}=12,$$

$$a_1+\frac{10}{3}r=12.$$

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1+5r=17 \\ a_1+\frac{10}{3}r=12. \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $a_1=17-5r$.

Otrzymaną wartość a_1 podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy równanie z niewiadomą r:

$$17-5r+\frac{10}{3}r=12,$$

$$r=3.$$

Obliczamy pierwszy wyraz: $a_1=2$.

Uwaga
W rozwiązaniu układu równań zdający może najpierw wyznaczyć niewiadomą $r=\frac{17}{5}-\frac{1}{5}a_1$.

Otrzymaną wartość r podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy równanie z niewiadomą a_1:

$$a_1+\frac{10}{3}\left(\frac{17}{5}-\frac{1}{5}a_1\right)=12,$$

$a_1 + \frac{170}{15} - \frac{10}{15}a_1 = 12$,

$\frac{1}{3}a_1 = \frac{2}{3}$,

$a_1 = 2$.

Dla $a_1 = 2$ mamy $r = 3$.

Wyznaczamy pozostałe wyrazy tworzące ciąg geometryczny:

$a_3 = a_1 + 2r = 8$, $a_k = a_1 + (k-1)r = 2 + (k-1)\cdot 3$.

Kolejne wyrazy a_1, a_3, a_k ciągu geometrycznego spełniają warunek: $a_3^{\ 2} = a_1 \cdot a_k$, stąd

$8^2 = 2\cdot\left[2 + (k-1)\cdot 3\right]$,

$32 = 3k - 1$,

$k = 11$.

Dla $k = 11$ wyrazy a_1, a_3, a_k w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp .... 1 p.

Zdający wykorzysta

- wzór na sumę *n*-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisze równanie z dwiema niewiadomymi a_1 i *r*, np.: $\frac{2a_1 + 10r}{2}\cdot 11 = 187$ lub $a_1 + 5r = 17$

albo

- średnią arytmetyczną pierwszego, trzeciego oraz dziewiątego wyrazu ciągu (a_n) i zapisze równanie z dwiema niewiadomymi a_1 i *r*, np.:
  $\frac{a_1 + a_1 + 2r + a_1 + 8r}{3} = 12$ lub $a_1 + \frac{10}{3}r = 12$

albo

- zależność między pierwszym, trzecim i *k*-tym wyrazem ciągu (a_n) wynikającą z faktu, że ciąg (a_1, a_3, a_k) jest geometryczny i zapisze np.: $a_3^{\ 2} = a_1 \cdot a_k$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi a_1 i *r*, np.: $\begin{cases} a_1 + 5r = 17 \\ a_1 + \frac{10}{3}r = 12 \end{cases}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający rozwiąże układ równań $a_1 = 2$ i $r = 3$ oraz zapisze zależność między pierwszym, trzecim i *k*-tym wyrazem ciągu (a_n) wynikającą z faktu, że ciąg (a_1, a_3, a_k) jest geometryczny, np.: $a_3^{\ 2} = a_1 \cdot a_k$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 p.
Zdający

- zapisze równanie z niewiadomą k wynikające z faktu, że ciąg (a_1, a_3, a_k) jest geometryczny oraz a_k jest k-tym wyrazem ciągu arytmetycznego, np.:
  $8^2 = 2(2 + (k-1)\cdot 3)$

albo

- rozwiąże układ równań z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy k, o ile otrzymana wartość k jest całkowita dodatnia.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.
Zdający obliczy $k = 11$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający od razu poda $a_1 = 2$ i $r = 3$ lub wypisze kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: 2, 5, 8, 11, …, ale nie uzasadni, że jest to jedyny ciąg spełniający warunki zadania i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający od razu poda $a_1 = 2$ i $r = 3$ lub wypisze kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: 2, 5, 8, 11, …, ale nie uzasadni, że jest to jedyny ciąg spełniający warunki zadania i wskaże lub obliczy $k = 11$, to otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający od razu poda $a_1 = 2$ i $r = 3$ lub wypisze kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: 2, 5, 8, 11, …, ale nie uzasadni, że jest to jedyny ciąg spełniający warunki zadania i zapisze równanie z niewiadomą k i popełni błąd rachunkowy w trakcie jego rozwiązywania, to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający od razu przyjmie ciąg arytmetyczny nie spełniający warunków zadania (suma 11 początkowych jego wyrazów jest różna od 187 lub średnia pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu jest różna od 12), to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.