CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

MMA 2018

UZUPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD	PESEL

miejsce na naklejkę

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI
POZIOM PODSTAWOWY

UZUPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

- ☐ dostosowania kryteriów oceniania
- ☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią

DATA: **7 maja 2018 r.**
GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**
CZAS PRACY: **170 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

NOWA FORMUŁA

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 26 stron (zadania 1–34). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–25) zaznacz na karcie odpowiedzi, w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (26–34) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki, a także z kalkulatora prostego.
9. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
10. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

MMA-P1_1P-182

MMA 2018

W każdym z zadań od 1. do 25. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Liczba $2\log_3 6 - \log_3 4$ jest równa

A. 4 **B.** 2 **C.** $2\log_3 2$ **D.** $\log_3 8$

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\sqrt[3]{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{81}{56}}$ jest równa

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{3}{2\sqrt[3]{21}}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{9}{4}$

Zadanie 3. (0–1)

Dane są liczby $a = 3{,}6 \cdot 10^{-12}$ oraz $b = 2{,}4 \cdot 10^{-20}$. Wtedy iloraz $\frac{a}{b}$ jest równy

A. $8{,}64 \cdot 10^{-32}$ **B.** $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ **C.** $1{,}5 \cdot 10^{8}$ **D.** $8{,}64 \cdot 10^{32}$

Zadanie 4. (0–1)

Cena roweru po obniżce o 15% była równa 850 zł. Przed obniżką ten rower kosztował

A. 865,00 zł **B.** 850,15 zł **C.** 1000,00 zł **D.** 977,50 zł

Zadanie 5. (0–1)

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $\frac{1-2x}{2} > \frac{1}{3}$ jest przedział

A. $\left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$ **B.** $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ **C.** $\left(\frac{1}{6}, +\infty\right)$ **D.** $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

Zadanie 6. (0–1)

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = -2(x+3)(x-5)$. Liczby x_1, x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji *f*. Zatem

A. $x_1 + x_2 = -8$ **B.** $x_1 + x_2 = -2$ **C.** $x_1 + x_2 = 2$ **D.** $x_1 + x_2 = 8$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 7. (0–1)

Równanie $\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}=0$

A. ma trzy rozwiązania: $x=-2$, $x=0$, $x=2$

B. ma dwa rozwiązania: $x=0$, $x=-2$

C. ma dwa rozwiązania: $x=-2$, $x=2$

D. ma jedno rozwiązanie: $x=0$

Zadanie 8. (0–1)

Funkcja liniowa f określona jest wzorem $f(x)=\dfrac{1}{3}x-1$, dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Funkcja f jest malejąca i jej wykres przecina oś Oy w punkcie $P=\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$.

B. Funkcja f jest malejąca i jej wykres przecina oś Oy w punkcie $P=(0,-1)$.

C. Funkcja f jest rosnąca i jej wykres przecina oś Oy w punkcie $P=\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$.

D. Funkcja f jest rosnąca i jej wykres przecina oś Oy w punkcie $P=(0,-1)$.

Zadanie 9. (0–1)

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x)=x^2-6x-3$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt o współrzędnych

A. $(-6,-3)$ **B.** $(-6,69)$ **C.** $(3,-12)$ **D.** $(6,-3)$

Zadanie 10. (0–1)

Liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x)=ax+b$, a punkt $M=(3,-2)$ należy do wykresu tej funkcji. Współczynnik a we wzorze tej funkcji jest równy

A. 1 **B.** $\dfrac{3}{2}$ **C.** $-\dfrac{3}{2}$ **D.** -1

Zadanie 11. (0–1)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n=\dfrac{5-2n}{6}$ dla $n\geq 1$. Ciąg ten jest

A. arytmetyczny i jego różnica jest równa $r=-\dfrac{1}{3}$.

B. arytmetyczny i jego różnica jest równa $r=-2$.

C. geometryczny i jego iloraz jest równy $q=-\dfrac{1}{3}$.

D. geometryczny i jego iloraz jest równy $q=\dfrac{5}{6}$.

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 12. (0–1)

Dla ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest spełniony warunek $a_4 + a_5 + a_6 = 12$. Wtedy

A. $a_5 = 4$ **B.** $a_5 = 3$ **C.** $a_5 = 6$ **D.** $a_5 = 5$

Zadanie 13. (0–1)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geq 1$, w którym $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 2\sqrt{2}$, $a_3 = 4\sqrt{2}$. Wzór na *n*-ty wyraz tego ciągu ma postać

A. $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n$

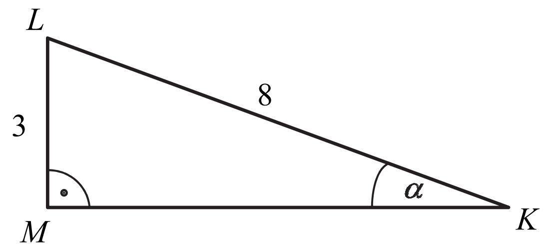
B. $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

C. $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

D. $a_n = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{2}$

Zadanie 14. (0–1)

Przyprostokątna *LM* trójkąta prostokątnego *KLM* ma długość 3, a przeciwprostokątna *KL* ma długość 8 (zobacz rysunek).



Wtedy miara α kąta ostrego *LKM* tego trójkąta spełnia warunek

A. $27^\circ < \alpha \leq 30^\circ$ **B.** $24^\circ < \alpha \leq 27^\circ$ **C.** $21^\circ < \alpha \leq 24^\circ$ **D.** $18^\circ < \alpha \leq 21^\circ$

Zadanie 15. (0–1)

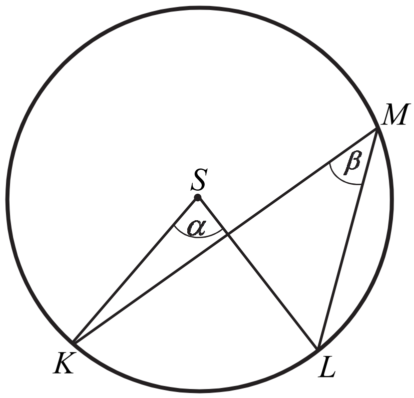
Dany jest trójkąt o bokach długości: $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$. Trójkątem podobnym do tego trójkąta jest trójkąt, którego boki mają długości

A. 10, 15, 20 **B.** 20, 45, 80 **C.** $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$ **D.** $\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 3\sqrt{5}$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 16. (0–1)

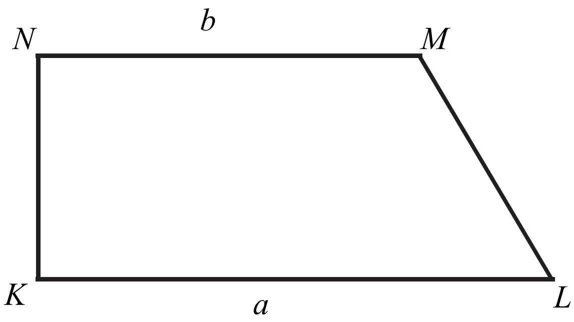
Dany jest okrąg o środku *S*. Punkty *K*, *L* i *M* leżą na tym okręgu. Na łuku *KL* tego okręgu są oparte kąty *KSL* i *KML* (zobacz rysunek), których miary α i β spełniają warunek $\alpha + \beta = 111^\circ$. Wynika stąd, że



A. $\alpha = 74^\circ$ **B.** $\alpha = 76^\circ$ **C.** $\alpha = 70^\circ$ **D.** $\alpha = 72^\circ$

Zadanie 17. (0–1)

Dany jest trapez prostokątny *KLMN*, którego podstawy mają długości $|KL| = a$, $|MN| = b$, $a > b$. Kąt *KLM* ma miarę 60°. Długość ramienia *LM* tego trapezu jest równa



A. $a - b$ **B.** $2(a - b)$ **C.** $a + \frac{1}{2}b$ **D.** $\frac{a+b}{2}$

Zadanie 18. (0–1)

Punkt $K = (2, 2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego *KLM*, w którym $|KM| = |LM|$. Odcinek *MN* jest wysokością trójkąta i $N = (4, 3)$. Zatem

A. $L = (5, 3)$ **B.** $L = (6, 4)$ **C.** $L = (3, 5)$ **D.** $L = (4, 6)$

Zadanie 19. (0–1)

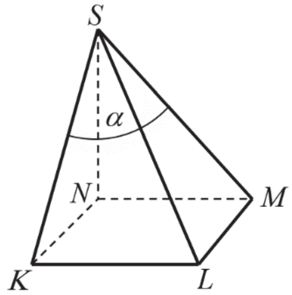
Proste o równaniach $y = (m+2)x + 3$ oraz $y = (2m-1)x - 3$ są równoległe, gdy

A. $m = 2$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = 0$ **D.** $m = 1$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 20. (0–1)

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat *KLMN* o boku długości 4. Wysokością tego ostrosłupa jest krawędź *NS*, a jej długość też jest równa 4 (zobacz rysunek).

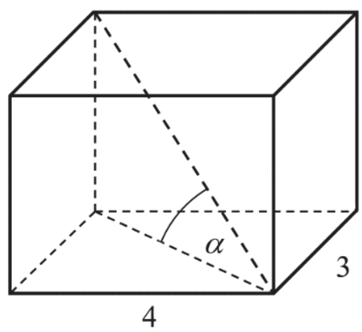


Kąt α, jaki tworzą krawędzie *KS* i *MS*, spełnia warunek

A. $\alpha = 45^\circ$ **B.** $45^\circ < \alpha < 60^\circ$ **C.** $\alpha > 60^\circ$ **D.** $\alpha = 60^\circ$

Zadanie 21. (0–1)

Podstawą graniastosłupa prostego jest prostokąt o bokach długości 3 i 4. Kąt α, jaki przekątna tego graniastosłupa tworzy z jego podstawą, jest równy 45° (zobacz rysunek).

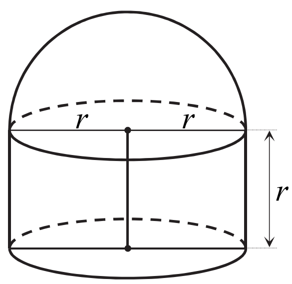


Wysokość graniastosłupa jest równa

A. 5 **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 22. (0–1)

Na rysunku przedstawiono bryłę zbudowaną z walca i półkuli. Wysokość walca jest równa r i jest taka sama jak promień półkuli oraz taka sama jak promień podstawy walca.



Objętość tej bryły jest równa

A. $\frac{5}{3}\pi r^3$ **B.** $\frac{4}{3}\pi r^3$ **C.** $\frac{2}{3}\pi r^3$ **D.** $\frac{1}{3}\pi r^3$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 23. (0–1)

W zestawie $\underbrace{2, 2, 2, ..., 2}_{m \text{ liczb}}, \underbrace{4, 4, 4, ..., 4}_{m \text{ liczb}}$ jest $2m$ liczb $(m \geq 1)$, w tym m liczb 2 i m liczb 4.

Odchylenie standardowe tego zestawu liczb jest równe

A. 2 **B.** 1 **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **D.** $\sqrt{2}$

Zadanie 24. (0–1)

Ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych mniejszych od 2018 i podzielnych przez 5?

A. 402 **B.** 403 **C.** 203 **D.** 204

Zadanie 25. (0–1)

W pudełku jest 50 kuponów, wśród których jest 15 kuponów przegrywających, a pozostałe kupony są wygrywające. Z tego pudełka w sposób losowy wyciągamy jeden kupon. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wyciągniemy kupon wygrywający, jest równe

A. $\frac{15}{35}$ **B.** $\frac{1}{50}$ **C.** $\frac{15}{50}$ **D.** $\frac{35}{50}$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 3x > 5$.

Odpowiedź: ....

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $\left(x^3+125\right)\left(x^2-64\right)=0$.

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	26.	27.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

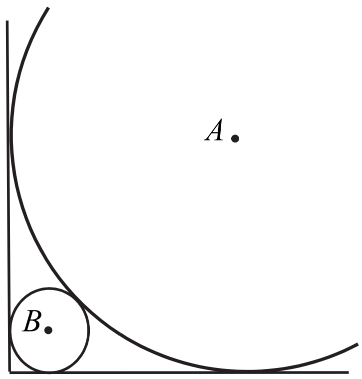
Zadanie 28. (0–2)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\geq\frac{2}{a+b}.$$

Zadanie 29. (0–2)

Okręgi o środkach odpowiednio A i B są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest styczny do obu ramion danego kąta prostego (zobacz rysunek). Promień okręgu o środku A jest równy 2.



Uzasadnij, że promień okręgu o środku B jest mniejszy od $\sqrt{2}-1$.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	28.	29.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 30. (0–2)

Do wykresu funkcji wykładniczej, określonej dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x)=a^x$ (gdzie $a>0$ i $a\neq 1$), należy punkt $P=(2,9)$. Oblicz a i zapisz zbiór wartości funkcji g, określonej wzorem $g(x)=f(x)-2$.

Odpowiedź: ....

Zadanie 31. (0–2)

Dwunasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równy 30, a suma jego dwunastu początkowych wyrazów jest równa 162. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	30.	31.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 32. (0–5)

W układzie współrzędnych punkty $A=(4,3)$ i $B=(10,5)$ są wierzchołkami trójkąta *ABC*. Wierzchołek *C* leży na prostej o równaniu $y=2x+3$. Oblicz współrzędne punktu *C*, dla którego kąt *ABC* jest prosty.

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	32.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 33. (0–4)

Dane są dwa zbiory: $A=\{100, 200, 300, 400, 500, 600, 700\}$ i $B=\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$.

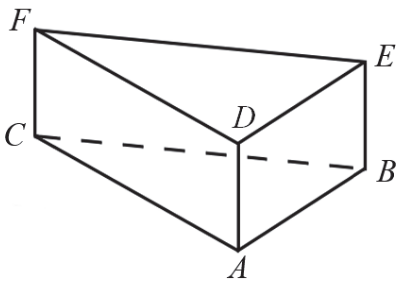
Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 3. Obliczone prawdopodobieństwo zapisz w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	33.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 34. (0–4)

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny (zobacz rysunek). Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $45\sqrt{3}$. Pole podstawy graniastosłupa jest równe polu jednej ściany bocznej. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	34.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY

W ROKU SZKOLNYM 2017/2018

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

FORMUŁA OD 2015

(„NOWA MATURA”)

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-P1

MAJ 2018

Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi (zaznaczenie właściwego pola na karcie odpowiedzi).

Zadanie 1. (0−1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)	
		Wersja I	**Wersja II**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.6).	**B**	**D**

Zadanie 2. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach (1.3).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**A**

Zadanie 3. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (1.4).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**D**

Zadanie 4. (0−1)

III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (1.9).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**A**

Zadanie 5. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą (3.3).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**C**

Zadanie 6. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	4. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje) (4.10).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**D**

Zadanie 7. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych (3.8).	**D**	**B**

Zadanie 8. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej (4.7).	**D**	**B**

Zadanie 9. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru (4.8).	**C**	**D**

Zadanie 10. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie (4.6).	**D**	**A**

Zadanie 11. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.2).	**A**	**B**

Zadanie 12. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).	**A**	**C**

Zadanie 13. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4).	**B**	**A**

Zadanie 14. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych – odczytanych z tablic (6.2).	**C**	**D**

Zadanie 15. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów (7.3).	**A**	**C**

Zadanie 16. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym (7.1).	**A**	**B**

Zadanie 17. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
III. Modelowanie matematyczne.	7. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych (7.4).	**B**	**D**

Zadanie 18. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka (8.5).	**B**	**A**

Zadanie 19. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.2).	**B**	**C**

Zadanie 20. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów (9.1).	**D**	**A**

Zadanie 21. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów (9.2).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**C**

Zadanie 22. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G11. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość walca, stożka, kuli (G11.2).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**C**

Zadanie 23. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych (10.1).	**Wersja I**	**Wersja II**
		B	**D**

Zadanie 24. (0−1)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania (10.2).	**Wersja I**	**Wersja II**
		D	**B**

Zadanie 25. (0−1)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).	**Wersja I**	**Wersja II**
		D	**B**

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 26. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (3.5).

Przykładowe rozwiązanie
Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $2x^2-3x-5$.
Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.
Pierwszy etap rozwiązania może zostać zrealizowany następująco:

- zapisujemy nierówność w postaci $2x^2-3x-5>0$ i obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2-3x-5$
  - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
    $\Delta=9-4\cdot 2\cdot(-5)=49$ i stąd $x_1=\frac{3-7}{4}=-1$ oraz $x_2=\frac{3+7}{4}=\frac{5}{2}$

  albo
  - stosujemy wzory Viète'a:
    $x_1\cdot x_2=-\frac{5}{2}$ oraz $x_1+x_2=\frac{3}{2}$, stąd $x_1=-1$ oraz $x_2=\frac{5}{2}$.

Drugi etap rozwiązania: podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ lub $x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.

Schemat punktowania
Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1=-1$ i $x_2=\frac{5}{2}$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x)=2x^2-3x-5$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

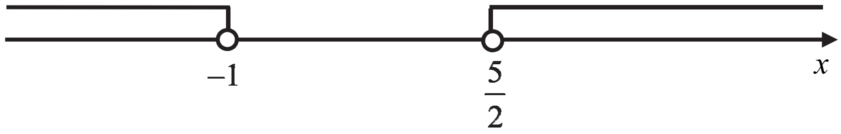
- realizując pierwszy etap popełni błędy, ale otrzyma nierówność, w której po jednej stronie występuje pełny trójmian kwadratowy posiadający dwa różne pierwiastki i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności.

Zdający otrzymuje ………………………………………………………………………… 2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ lub $x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$, lub $x<-1\vee x>\frac{5}{2}$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwagi

1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $x<-1$ i $x>\frac{5}{2}$, $x<-1$ oraz $x>\frac{5}{2}$, itp.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1=-1$, $x_2=\frac{5}{2}$ i błędnie zapisze odpowiedź, np. $x\in\left(-\infty,1\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający po poprawnym rozwiązaniu nierówności zapisuje w odpowiedzi, jako zbiór rozwiązań, zbiór, zawierający elementy nienależące do zbioru $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ lub zbiór pusty, to otrzymuje **1 punkt**. Zapisanie w miejscu przeznaczonym na odpowiedź pierwiastków trójmianu kwadratowego nie jest traktowane jak opis zbioru rozwiązań.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)\cup\left(-1,+\infty\right)$, $\left(+\infty,\frac{5}{2}\right)\cup\left(-1,-\infty\right)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$ (3.7).

Przykładowe rozwiązanie

Lewa strona równania jest iloczynem dwóch czynników x^3+125 oraz x^2-64. Zatem iloczyn ten jest równy 0, gdy co najmniej jeden z tych czynników jest równy 0, czyli $x^3+125=0$ lub $x^2-64=0$.

Rozwiązaniem równania $x^3+125=0$ jest $x=\sqrt[3]{-125}=-5$.

Równanie $x^2-64=0$ doprowadzamy do postaci $(x-8)\cdot(x+8)=0$. Przynajmniej jeden z czynników $x-8$ lub $x+8$ jest równy 0, czyli $x=8$ lub $x=-8$.

Równanie $\left(x^3+125\right)\left(x^2-64\right)=0$ ma trzy rozwiązania rzeczywiste:
$x=-5$, $x=8$. $x=-8$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zapisze dwa równania $x^3+125=0$ i $x^2-64=0$

lub

- wyznaczy poprawnie (lub poda) rozwiązania jednego z równań: $x^3+125=0$ lub $x^2-64=0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $x=-5$, $x=8$, $x=-8$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający poda wszystkie rozwiązania równania, bez rachunków lub uzasadnienia, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający uzyska trafne rozwiązania równania, ale w wyniku błędnej metody, to otrzymuje **0 punktów**, o ile nie uzyska 1 punktu za zapisanie dwóch równań: $x^3+125=0$, $x^2-64=0$.
3. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy pierwiastki wielomianu $\left(x^3+125\right)\left(x^2-64\right)$ i poda niewłaściwą odpowiedź, np. $x\in\mathbb{R}-\{-8,-5,8\}$, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 28. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a\pm b)^2$ oraz a^2-b^2 (2.1).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\frac{a+b}{2ab}\geq\frac{2}{a+b}.$$

Ponieważ liczby *a* i *b* są dodatnie, więc $a+b>0$ i $2ab>0$. Mnożąc obie strony nierówności przez $2ab(a+b)$, otrzymujemy

$$(a+b)^2\geq 4ab,$$

$$a^2+2ab+b^2\geq 4ab,$$

$$a^2-2ab+b^2\geq 0,$$

$$(a-b)^2\geq 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych *a* i *b*, więc w szczególności również dla liczb dodatnich. To kończy dowód.

II sposób

Nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\frac{a+b}{2ab}-\frac{2}{a+b}\geq 0,$$

$$\frac{(a+b)^2-4ab}{2ab(a+b)}\geq 0.$$

Ponieważ liczby a i b są dodatnie, więc $a+b>0$ i $2ab>0$. Mnożąc obie strony nierówności przez $2ab(a+b)$, otrzymujemy

$$(a+b)^2-4ab\geq 0,$$

$$a^2+2ab+b^2-4ab\geq 0,$$

$$a^2-2ab+b^2\geq 0,$$

$$(a-b)^2\geq 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b, więc w szczególności również dla liczb dodatnich. To kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze nierówność w postaci $(a+b)^2\geq 4ab$ lub $(a+b)^2-4ab\geq 0$, lub $\frac{(a+b)^2-4ab}{2ab(a+b)}\geq 0$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi

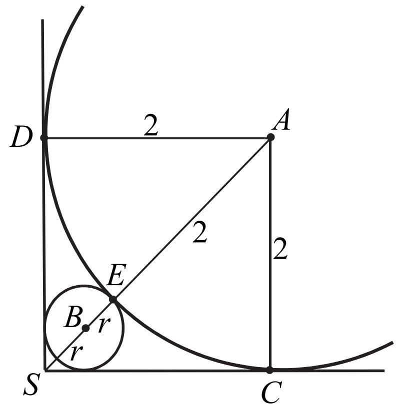
1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości a i b, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający zakończy rozumowanie, zapisując nierówność $a^2+b^2\geq 2ab$ i nie powoła się na stosowne twierdzenie, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający przeprowadzi poprawne rozumowanie, które zakończy zapisaniem nierówności $(a-b)^2\geq 0$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 29. (0–4)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych (7.2).

Przykładowe rozwiązania

I sposób
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy $|AS| = 2\sqrt{2}$ oraz $|AE| = 2$. Zatem

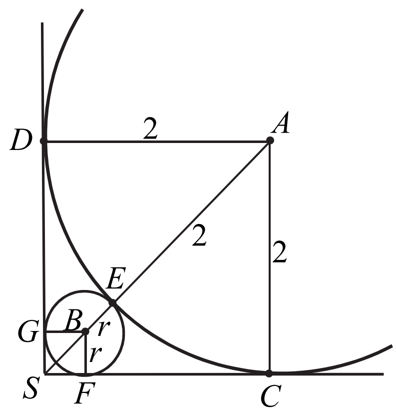
$$|SE| = 2\sqrt{2} - 2 .$$

Średnica okręgu o środku B i promieniu r jest krótsza od odcinka SE, więc

$$2r < 2\sqrt{2} - 2 \text{, czyli } r < \sqrt{2} - 1 .$$

Co kończy dowód.

II sposób
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy $|AS| = 2\sqrt{2}$, $|BS| = r\sqrt{2}$ oraz $|AE| = 2$.

Ponieważ $|AS| = |BS| + |BE| + |AE|$, więc otrzymujemy

$$2\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r + 2 ,$$
$$r\left(\sqrt{2} + 1\right) = 2\sqrt{2} - 2 .$$

Stąd mnożąc obie strony tego równania przez $\sqrt{2}-1$ otrzymujemy

$$r\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=2\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right),$$

$$r=2\left(\sqrt{2}-1\right)^2,$$

$$r=2\left(2-2\sqrt{2}+1\right),$$

$$r=2\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

Sprawdźmy, czy $2\left(3-2\sqrt{2}\right)<\sqrt{2}-1$.

Przekształcamy tę nierówność równoważnie.

$$6-4\sqrt{2}<\sqrt{2}-1$$

$$7<5\sqrt{2}$$

Ponieważ $\sqrt{2}\approx 1,41>1,4$, więc $5\sqrt{2}>7$. Oznacza to, że $r<\sqrt{2}-1$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- obliczy $|SE|=2\sqrt{2}-2$

albo

- zapisze równość $2\sqrt{2}=r\sqrt{2}+r+2$.

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełny dowód.

Uwagi

1. Jeżeli zdający poprawnie obliczy r i zapisze wynik w postaci ułamka, w którym w mianowniku występuje liczba niewymierna, np. $r=\frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+1}$, i błędnie szacuje tę liczbę, np. stosując takie same przybliżenia z niedomiarem $\sqrt{2}$ w liczniku i w mianowniku, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający błędnie przyjmie, że długość odcinka, którego jednym końcem jest punkt styczności okręgów, a drugim wierzchołek kąta prostego, jest równa długości średnicy mniejszego okręgu i nie wycofa się z tego założenia oraz nie obliczy długości wspomnianego odcinka, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 30. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw (4.14). Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ (4.4).

Przykładowe rozwiązanie

Ponieważ punkt P leży na wykresie funkcji f, więc możemy zapisać:

$$9 = a^2 \text{, gdzie } a > 0 .$$

Stąd $a = 3$.

Zbiorem wartości funkcji wykładniczej f jest przedział $(0, +\infty)$. Wykres funkcji g powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki w dół. Zatem zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(-2, +\infty)$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy:

- obliczy a: $a = 3$

albo

- zapisze zbiór wartości funkcji g: $(-2, +\infty)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy a: $a = 3$ i zapisze zbiór wartości funkcji g: $(-2, +\infty)$.

Uwaga

Opis zbioru wartości uznaje się za poprawny, jeśli zbiór ten jest przedstawiony graficznie w sposób jednoznacznie wskazujący, że liczba -2 nie należy do tego zbioru, lub zbiór ten jest opisany słownie, lub jakąkolwiek poprawną nierównością.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór wartości funkcji w postaci $(+\infty, -2)$, to przyznajemy **2 punkty**, o ile obliczy $a = 3$.

Zadanie 31. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).

Przykładowe rozwiązania

I sposób
Korzystamy ze wzoru na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na a_{12}:

$$a_{12} = a_1 + (12-1)\cdot r .$$

Korzystamy ze wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na S_{12}:

$$S_{12} = \frac{2a_1 + (12-1)\cdot r}{2}\cdot 12 .$$

Otrzymujemy układ równań

$$30 = a_1 + 11r \ \text{ i } \ 162 = 12a_1 + 66r .$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -3 .$$

II sposób
Korzystamy ze wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na S_{12}:

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2}\cdot 12 .$$

Otrzymujemy równanie

$$162 = \frac{a_1 + 30}{2}\cdot 12 .$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -3 .$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zapisze dwa równania z niewiadomymi a_1 i r wynikające z zastosowania poprawnych wzorów na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:
  np.: $30 = a_1 + 11r$ i $162 = \frac{2a_1 + 11\cdot r}{2}\cdot 12$

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą a_1 wynikające z zastosowania poprawnego wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego bez wykorzystywania różnicy ciągu:
  np.: $162 = \frac{a_1 + 30}{2}\cdot 12$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą a_1 i obliczy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = -3$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, zapisze poprawny ciąg poprzez wypisanie 12 początkowych kolejnych wyrazów i ustali, że $a_1 = -3$, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, wypisze co najmniej trzy kolejne wyrazy i ustali, że $a_1 = -3$, ale nie zapisze wszystkich 12 początkowych wyrazów ciągu, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko $a_1 = -3$ lub $a_1 = -3$ i $r = 3$, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 32. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (8.1). Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt (8.3). Zdający oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych (8.4).

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u> – *proste prostopadłe*
Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AB

$$a_{AB} = \frac{1}{3}.$$

Ponieważ kąt prosty w trójkącie ABC jest przy wierzchołku B, więc wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez punkt B

$$y = -3x + 35.$$

Obliczamy współrzędne punktu C, który jest punktem wspólnym prostych określonych równaniami $y = 2x + 3$ i $y = -3x + 35$:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -3x + 35 \end{cases}$$

Stąd po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy parę $x = \frac{32}{5}$ i $y = \frac{79}{5}$.

Zatem punkt C ma współrzędne.$\left(\frac{32}{5}, \frac{79}{5}\right)$

<u>II sposób</u> – *twierdzenie Pitagorasa*
Ponieważ wierzchołek C trójkąta prostokątnego ABC leży na prostej o równaniu $y = 2x + 3$, więc jego współrzędne zapisujemy następująco

$$C = (x,\ 2x + 3).$$

Punkt B jest wierzchołkiem kąta prostego, zatem z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2.$$

Po podstawieniu współrzędnych punktów A, B i C otrzymujemy równanie

$$(x-4)^2 + (2x+3-3)^2 = (10-4)^2 + (5-3)^2 + (x-10)^2 + (2x+3-5)^2,$$

czyli równanie

$$x^2-8x+16+4x^2=36+4+x^2-20x+100+4x^2-8x+4\ .$$

Zatem

$$20x=128 \text{ i dalej } x=\tfrac{32}{5}.$$

Jeśli $x=\tfrac{32}{5}$, to $y=\tfrac{79}{5}$. Zatem $C=\left(\tfrac{32}{5},\tfrac{79}{5}\right)$.

<u>III sposób</u> – *iloczyn skalarny*

Wektory niezerowe są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny jest równy 0. W tym przypadku oznacza to, że iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ jest równy 0.

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ są równe $\overrightarrow{AB}=[6,2]$.

Punkt C ma współrzędne równe $C=(x,\ 2x+3)$, więc współrzędne wektora $\overrightarrow{BC}$ są równe

$$\overrightarrow{BC}=[x-10,2x+3-5].$$

Z warunku $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}=0$ otrzymujemy równanie

$$6(x-10)+2(2x-2)=0,$$

$$3x-30+2x-2=0\ ,$$

$$x=\tfrac{32}{5}.$$

Zatem $C=\left(\tfrac{32}{5},2\cdot\tfrac{32}{5}+3\right)=\left(\tfrac{32}{5},\tfrac{79}{5}\right)$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- uzależni obie współrzędne punktu C od jednej zmiennej, np.: $C=(x,\ 2x+3)$ lub $C=\left(\frac{y-3}{2},y\right)$

albo

- zapisze równość $|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2$ i obliczy długość AB: $|AB|=2\sqrt{10}$,

albo

- zapisze równość $|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2$ i zapisze jedną z długości $|AC|$ lub $|BC|$ w zależności od współrzędnych punktu C,

albo

- obliczy współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=[6,2]$ i zapisze, że $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}=0$,

albo

- wyznaczy współrzędne wektora $\overrightarrow{BC}$ w zależności od współrzędnych punktu C: $\overrightarrow{BC}=[x-10,\ y-5]$ i zapisze, że $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}=0$,

albo

- wyznaczy współrzędne wektora $\overrightarrow{BC}$ w zależności od jednej współrzędnej punktu C, np.: $\overrightarrow{BC}=[x-10,\ 2x+3-5]$,

albo

- obliczy współczynnik kierunkowy równania prostej AB:
$$a_{AB}=\frac{1}{3}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez punkt B: $a_{BC}=-3$

albo

- zapisze równanie z dwiema niewiadomymi, np.:
$\left(\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(10-4)^2+(5-3)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}\right)^2$,

albo

- obliczy współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=[6,\ 2]$, wyznaczy współrzędne wektora $\overrightarrow{BC}$ w zależności od jednej współrzędnej punktu C, np.: $\overrightarrow{BC}=[x-10,\ 2x+3-5]$ i zapisze, że $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}=0$,

albo

- zapisze równość wynikającą z warunku $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}=0$, w której niewiadomymi są dwie współrzędne punktu C, np.: $6(x-10)+2(y-5)=0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, która jest współrzędną punktu C, np.:
$$2x+3=-3(x-10)+5$$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.
Zdający

- obliczy $x=\frac{32}{5}$ albo $y=\frac{79}{5}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

albo

- obliczy obie współrzędne punktu C z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.
Zdający obliczy i zapisze współrzędne punktu $C=\left(\frac{32}{5},\frac{79}{5}\right)$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **4 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.
2. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, ale popełnia błąd, który jednak nie ułatwia rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania i:
   a) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd przy wyznaczaniu współczynnika a_{AB}, np. $\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B}$ zamiast $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
   b) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd przy wyznaczaniu równania prostej *BC*, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
   c) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd, polegający na tym, że zdający zapisze błędną równość: $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
   d) w I sposobie rozwiązania przyjmie, że kąt prosty jest przy wierzchołku A, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
   e) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd przy podstawieniu do wzoru na odległość punktów, nawet trzykrotnie powtórzony, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
   f) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest zamiana miejscami współrzędnych punktu *C* w początkowym etapie rozwiązania, np.: $C = (2x+3, x)$, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
   g) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest przyjęcie bez obliczeń błędnego współczynnika *b* w równaniu prostej *BC* (np. $\frac{5}{3}$), to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający realizuje pełną strategię rozwiązania, ale popełnia błąd merytoryczny, który jednak nie ułatwia rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania i tym jedynym błędem merytorycznym jest błąd, polegający na zastosowaniu nieistniejącego wzoru „$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$”, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na tym, że zapisuje błędną równość: $|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = 2x + 3$, to za rozwiązanie zadania otrzymuje **0 punktów**, o ile w rozwiązaniu nie występują inne zapisy wymienione w schemacie oceniania, za które należy przyznać zdającemu punkty, np.: $C = (x,\ 2x+3)$.
6. Jeżeli oprócz poprawnego rozwiązania (kąt prosty przy wierzchołku *B*) zdający podaje inne rozwiązanie (np. kąt prosty przy wierzchołku *A*), którego nie odrzuca, to otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.
7. Jeżeli zdający zapisze równanie prostej *AB* w postaci ogólnej (np. dokona właściwego podstawienia współrzędnych punktów do równania prostej przechodzącej przez 2 punkty) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 33. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para (x,y), gdzie $x\in A$ i $y\in B$. Zatem zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych ma postać:

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(100,10),(100,11),(100,12),(100,13),(100,14),(100,15),(100,16),\\ &(200,10),(200,11),(200,12),(200,13),(200,14),(200,15),(200,16),\\ &(300,10),(300,11),(300,12),(300,13),(300,14),(300,15),(300,16),\\ &(400,10),(400,11),(400,12),(400,13),(400,14),(400,15),(400,16),\\ &(500,10),(500,11),(500,12),(500,13),(500,14),(500,15),(500,16),\\ &(600,10),(600,11),(600,12),(600,13),(600,14),(600,15),(600,16),\\ &(700,10),(700,11),(700,12),(700,13),(700,14),(700,15),(700,16)\}.\end{aligned}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega|=7\cdot 7=49$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 3. Z cechy podzielności liczby całkowitej przez 3 wynika, że suma cyfr otrzymanej liczby $x+y$ musi być podzielna przez 3. Zbiór A ma postać:

$$\begin{aligned}A=\{&(100,11),(100,14),(200,10),(200,13),(200,16),\\ &(300,12),(300,15),(400,11),(400,14),(500,10),\\ &(500,13),(500,16),(600,12),(600,15),(700,11),(700,14)\}.\end{aligned}$$

Zdarzeniu A sprzyja więc 16 zdarzeń elementarnych, czyli $|A|=16$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{16}{49}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie liczbą podzielną przez 3, jest równe $\frac{16}{49}$.

Uwaga
Zdający może zapisać zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych jako zbiór sum możliwych do utworzenia w wyniku losowania, tzn. może zastosować zapis:

$$\Omega = \{110, 111, 112, 113, 114, 115, 116,$$
$$210, 211, 212, 213, 214, 215, 216,$$
$$310, 311, 312, 313, 314, 315, 316,$$
$$410, 411, 412, 413, 414, 415, 416,$$
$$510, 511, 512, 513, 514, 515, 516,$$
$$610, 611, 612, 613, 614, 615, 616,$$
$$710, 711, 712, 713, 714, 715, 716\}.$$

Wtedy zbiór
$A = \{111, 114, 210, 213, 216, 312, 315, 411, 414, 510, 513, 516, 612, 615, 711, 714\}$.

<u>II sposób</u>

Rysujemy tabelę, która przedstawia model rozważanego doświadczenia.

	100	200	300	400	500	600	700
10		×			×		
11	×			×			×
12			×			×	
13		×			×		
14	×			×			×
15			×			×	
16		×			×		

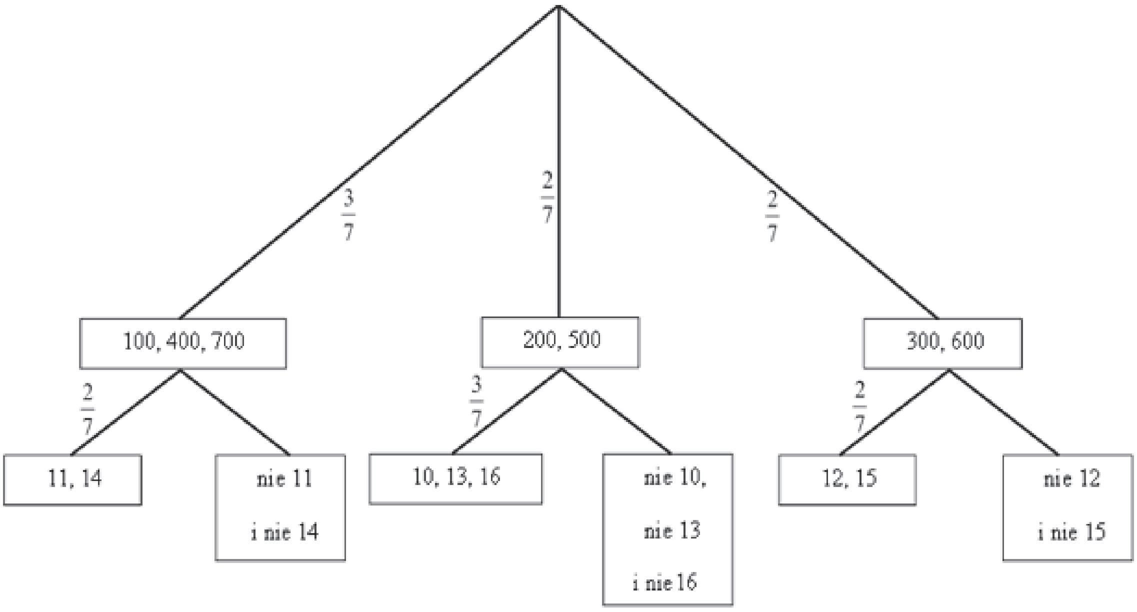
Zdarzeniom elementarnym odpowiadają komórki tej tabeli. Jest ich 49, zatem $|\Omega| = 49$.
Symbolem × zaznaczamy te zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu A, polegającemu na tym, że suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 3.
Zdarzeniu A sprzyja więc 16 zdarzeń elementarnych, czyli $|A| = 16$.
Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie liczbą podzielną przez 3, jest równe $\frac{16}{49}$.

III sposób

Rysujemy drzewko rozważanego doświadczenia.



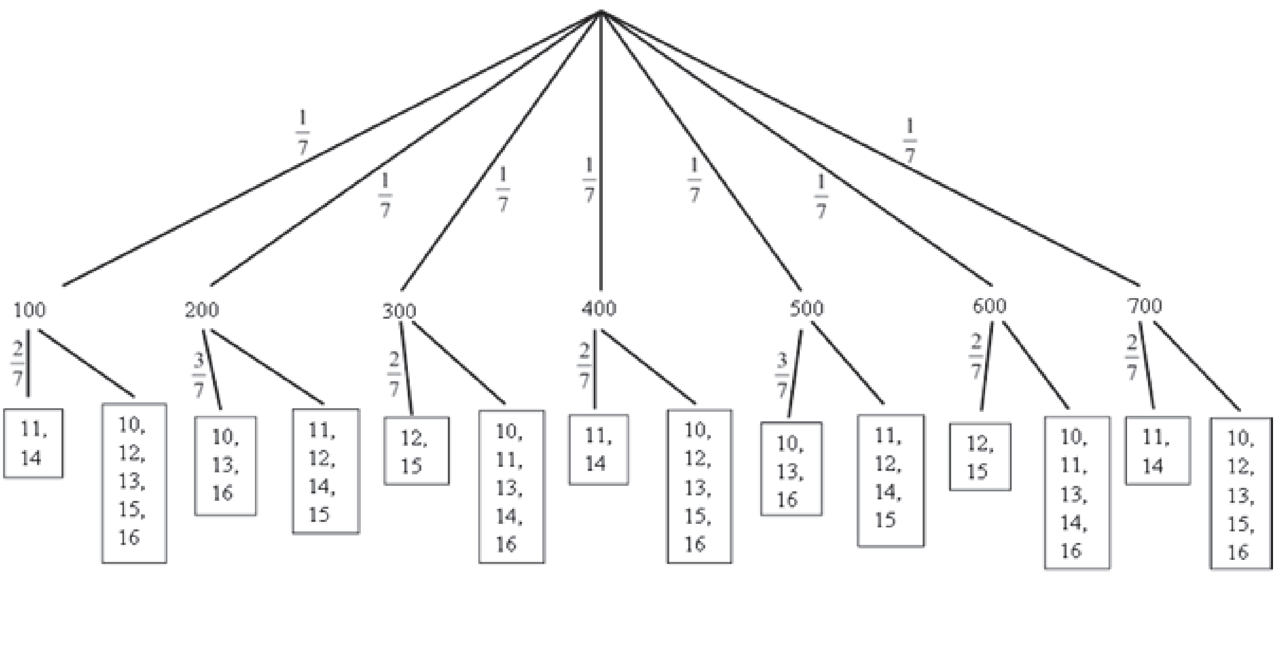
Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}=\frac{16}{49}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie liczbą podzielną przez 3, jest równe $\frac{16}{49}$.

Uwaga

Zdający może narysować drzewo probabilistyczne, w którym na każdym z etapów lub na jednym z etapów rozważa każdą możliwą do wylosowania liczbę oddzielnie. Przykład takiego drzewa znajduje się poniżej.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A może być obliczone w następujący sposób:

$$P(A)=5\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{7}+2\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{16}{49}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- zapisze, że $|\Omega|=7\cdot 7$

albo

- zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3,

albo

- poda sposób obliczania $|A|$, np. przyjmie porządek przy wyznaczaniu sum podzielnych przez 3 oraz wyznaczy przynajmniej 4 zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A i nie zaliczy do zbioru A niewłaściwego zdarzenia elementarnego,

albo

- przedstawi graficznie model doświadczenia z 49 zdarzeniami elementarnymi, np. narysuje tabelę z 7 kolumnami i 7 wierszami,

albo

- narysuje drzewko doświadczenia:
  1. składające się ze wszystkich 49 gałęzi

  albo

  2. składające się z mniej niż 49 gałęzi, ale wskaże na nim gałęzie odpowiadające wylosowaniu w pierwszym etapie dwóch spośród 7 liczb: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700 oraz wylosowaniu w drugim etapie odpowiednich liczb dających z liczbą wylosowaną w pierwszym etapie sumę podzielną przez 3

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- zapisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A

albo

- zapisze, że $|\Omega|=7\cdot 7$ i zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3,

albo

- zapisze, że $|\Omega|=7\cdot 7$ i poda sposób obliczania $|A|$, np. przyjmie porządek przy wyznaczaniu sum podzielnych przez 3, wyznaczy przynajmniej 4 zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, ale nie zaliczy do zbioru A niewłaściwego zdarzenia elementarnego,

albo

- przedstawi graficznie model doświadczenia z 49 zdarzeniami elementarnymi, np. narysuje tabelę z 7 kolumnami i 7 wierszami oraz zapisze, że $|\Omega|=7\cdot 7$,

albo

- narysuje drzewko doświadczenia:
  1. składające się ze wszystkich 49 gałęzi i zapisze prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów

  albo

  2. składające się z mniej niż 49 gałęzi, ale wskaże na nim gałęzie odpowiadające wylosowaniu w pierwszym etapie dwóch spośród 7 liczb: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700 oraz wylosowaniu w drugim etapie odpowiednich liczb dających z liczbą wylosowaną w pierwszym etapie sumę podzielną przez 3 i zapisze prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów;

albo

- narysuje drzewko doświadczenia, w którym wskaże wszystkie gałęzie odpowiadające zdarzeniu A

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający

- zapisze, że $|\Omega| = 7 \cdot 7$ oraz zapisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, ale nie zaliczy do zbioru A niewłaściwego zdarzenia elementarnego

albo

- zapisze, że $|\Omega| = 7 \cdot 7$ oraz zapisze, że $|A| = 16$ i przedstawi sposób obliczenia tej liczby, np. zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3 i wskaże w dowolny sposób przykładowe zdarzenie elementarne lub przyjmie porządek przy wyznaczaniu sum podzielnych przez 3 i wyznaczy przynajmniej 4 zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, ale nie zaliczy do zbioru A niewłaściwego zdarzenia elementarnego,

albo

- przedstawi graficznie model doświadczenia z 49 zdarzeniami elementarnymi (np. narysuje tabelę z 7 kolumnami i 7 wierszami), zapisze $|\Omega| = 7 \cdot 7$, oraz zaznaczy 16 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i żadnych innych zdarzeń elementarnych nie zaliczy do A,

albo

- narysuje drzewko doświadczenia, w którym wystąpią wszystkie gałęzie odpowiadające zdarzeniu A wraz z prawdopodobieństwami oraz poprawnie zastosuje regułę drzewka do obliczenia prawdopodobieństwa $P(A)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający uzyska w wyniku końcowym liczbę spoza przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

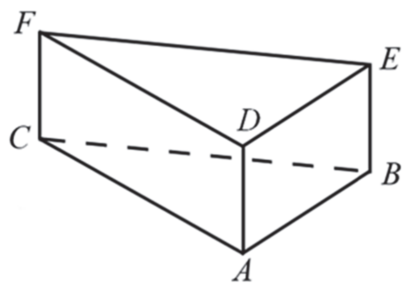
2. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu wypisze 17 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, w tym 16 poprawnych i jedno niepoprawne oraz otrzyma prawdopodobieństwo równe $\frac{17}{49}$, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu wypisze 15 poprawnych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i otrzyma prawdopodobieństwo równe $\frac{15}{49}$, to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu przyjmie błędną liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych i nie jest to efekt błędu rachunkowego, np. przyjmie $|\Omega| = 7 \cdot 6$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu zapisze jedynie $|\Omega| = 7 \cdot 7$, $|A| = 16$ i nie przedstawi czytelnego uzasadnienia liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, i obliczy $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}$, to otrzymuje **1 punkt**.
6. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu zapisze $|\Omega| = 7 \cdot 7$, $|A| = 16$ oraz zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3, ale w przedstawionym rozwiązaniu nie można zidentyfikować żadnego zdarzenia elementarnego, które zdający powinien rozważać, to otrzymuje **2 punkty**, nawet jeśli w rozwiązaniu występuje poprawny wynik końcowy.
7. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu wypisze 16 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, w tym 15 poprawnych i jedno niewłaściwe i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 34. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	G11. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego (G11.2). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą (3.4).

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Rozważany graniastosłup ma 5 ścian, a każda z nich ma takie samo pole. Obliczamy pole podstawy, a zarazem pole jednej ściany bocznej:

$$45\sqrt{3} : 5 = 9\sqrt{3}.$$

Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny, więc jego pole jest równe

$$P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3},$$

$$a = 6\,.$$

Ściana boczna jest prostokątem o bokach długości a i h, więc pole każdej ściany bocznej jest równe

$$P_{ABED} = ah\,.$$

Z warunków zadania wynika, że:

$$ah = 9\sqrt{3}\,.$$

Znamy długość krawędzi podstawy a, zatem:

$$6h = 9\sqrt{3}\,.$$

Obliczamy wysokość graniastosłupa

$$h = \tfrac{3}{2}\sqrt{3}\,.$$

Objętość graniastosłupa jest równa

$$V = P_{ABC} \cdot h = 9\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{81}{2}\,.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający

- zapisze zależność między wielkościami a i h wynikającą z równości pól podstawy i ściany bocznej graniastosłupa: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = ah$

albo

- obliczy pole jednej ściany graniastosłupa: $45\sqrt{3} : 5 = 9\sqrt{3}$,

albo

- zapisze równanie: $2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3ah = 45\sqrt{3}$

albo

- zapisze równania: $2 \cdot \frac{1}{2}ah_p + 3ah = 45\sqrt{3}$ i $\frac{1}{2}ah_p = ah$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, pozwalające na wyznaczenie długości krawędzi podstawy lub wysokości graniastosłupa i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

albo

- uzależni objętość bryły od jednej zmiennej

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający

- obliczy długość krawędzi podstawy i wysokość graniastosłupa: $a=6$, $h=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

albo

- obliczy długość krawędzi podstawy graniastosłupa: $a=6$ i uzależni objętość bryły od jednej zmiennej a lub obliczy wysokość graniastosłupa $h=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ i uzależni objętość bryły od jednej zmiennej h

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy objętość graniastosłupa: $V=\dfrac{81}{2}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, a jedynymi błędami w przedstawionym rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełnia błąd polegający na niepoprawnym stosowaniu wzoru na pole trójkąta równobocznego albo wzoru na pole prostokąta, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
3. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na niewłaściwym określeniu zależności między polem podstawy a polem ściany bocznej i w efekcie rozważa jeden z trzech przypadków: $2P_p=P_{śb}$, $P_p=3P_{śb}$, $2P_p=3P_{śb}$, albo błąd, polegający na przyjęciu, że graniastosłup ma trzy ściany boczne i jedną podstawę, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
4. Jeżeli zdający popełnia jeden błąd, opisany w uwagach 2. lub 3., a ponadto popełnia błędy rachunkowe, ale poprawnie obliczy pole jednej ściany albo realizuje strategię rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający popełnia inne niż wymienione w uwagach 2. lub 3. błędy, dotyczące pól ścian bryły, ale poprawnie obliczy pole jednej ściany albo realizuje strategię rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.
6. Jeżeli zdający rozważa graniastosłup trójkątny, który nie jest prawidłowy, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.