

UZUPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD	PESEL
<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>

*miejsce
na naklejkę*

**EGZAMIN MATURALNY
Z MATEMATYKI
POZIOM ROZSZERZONY**

DATA: **9 maja 2018 r.**
GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**
CZAS PRACY: **180 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

**UZUPEŁNIA ZESPÓŁ
NADZORUJĄCY**

Uprawnienia zdającego do:

- | | |
|--------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | dostosowania
kryteriów oceniania |
| <input type="checkbox"/> | nieprzenoszenia
zaznaczeń na kartę |

Instrukcja dla zdającego

- Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 18 stron (zadania 1–15). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
- Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
- Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–4) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz właściwe.
- W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
- Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–15) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
- Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
- Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
- Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
- Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.
- Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
- Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

NOWA FORMUŁA



MMA-R1_1P-182

W zadaniach od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Dane są liczby: $a = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$, $b = \frac{1}{2\sqrt[4]{8}}$, $c = \sqrt[4]{8}$, $d = \frac{2}{\sqrt[4]{8}}$ oraz $k = 2^{-\frac{1}{4}}$. Prawdziwa jest równość

- A. $k = a$ B. $k = b$ C. $k = c$ D. $k = d$

Zadanie 2. (0–1)

Równanie $||x| - 2| = |x| + 2$

- A. nie ma rozwiązań.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
D. ma dokładnie cztery rozwiązania.

Zadanie 3. (0–1)

Wartość wyrażenia $2 \log_5 10 - \frac{1}{\log_{20} 5}$ jest równa

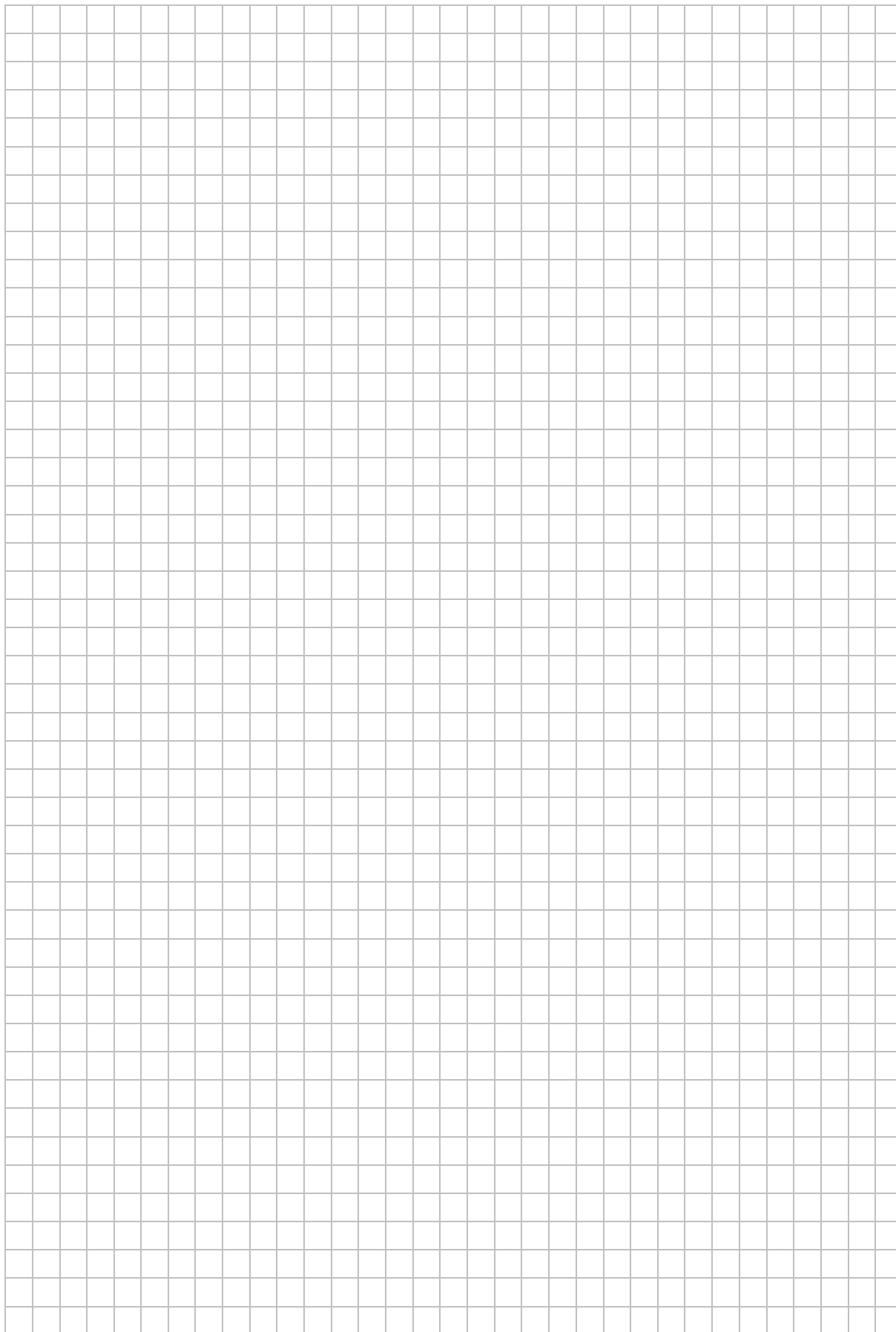
- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

Zadanie 4. (0–1)

Granica $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x+2}{x^2-5x+6}$ jest równa

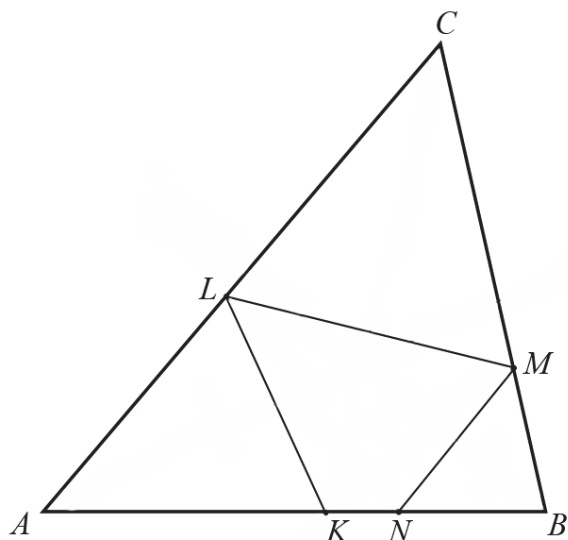
- A. $-\infty$ B. -1 C. 0 D. $+\infty$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

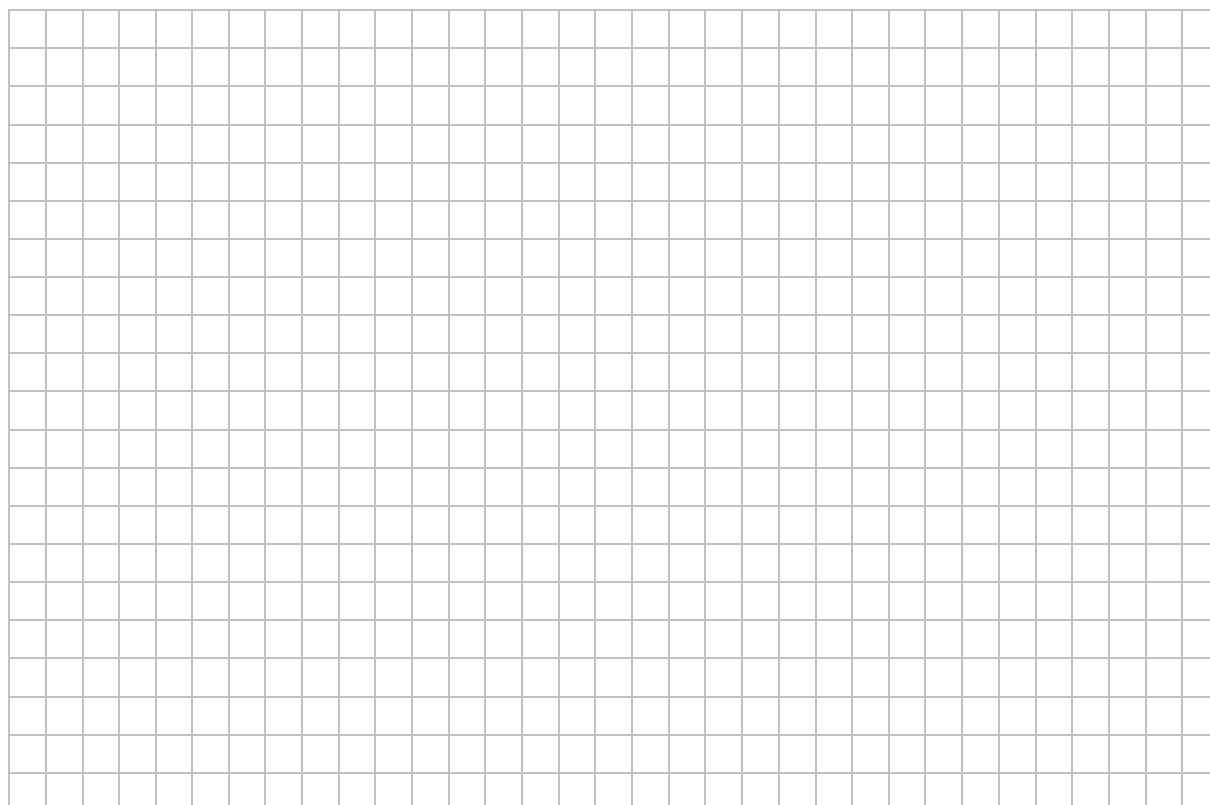


Zadanie 7. (0–3)

Trójkąt ABC jest ostrokątny oraz $|AC| > |BC|$. Dwusieczna d_C kąta ACB przecina bok AB w punkcie K . Punkt L jest obrazem punktu K w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_A kąta BAC , punkt M jest obrazem punktu L w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_C kąta ACB , a punkt N jest obrazem punktu M w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_B kąta ABC (zobacz rysunek).



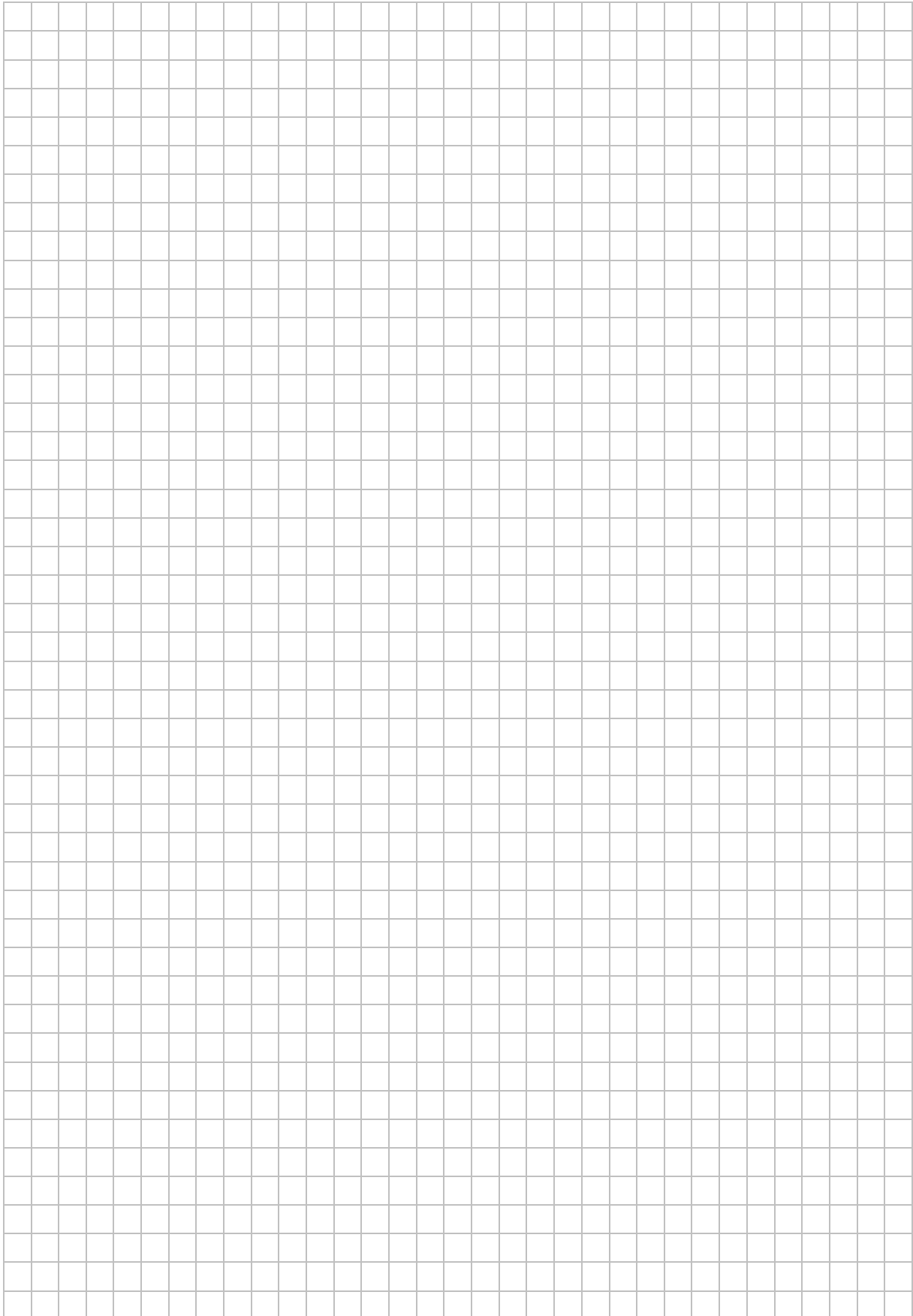
Udowodnij, że na czworokącie $KNML$ można opisać okrąg.



Wypełnia egzaminator	Nr zadania	5.	6.	7.
	Maks. liczba pkt	2	3	3
	Uzyskana liczba pkt			

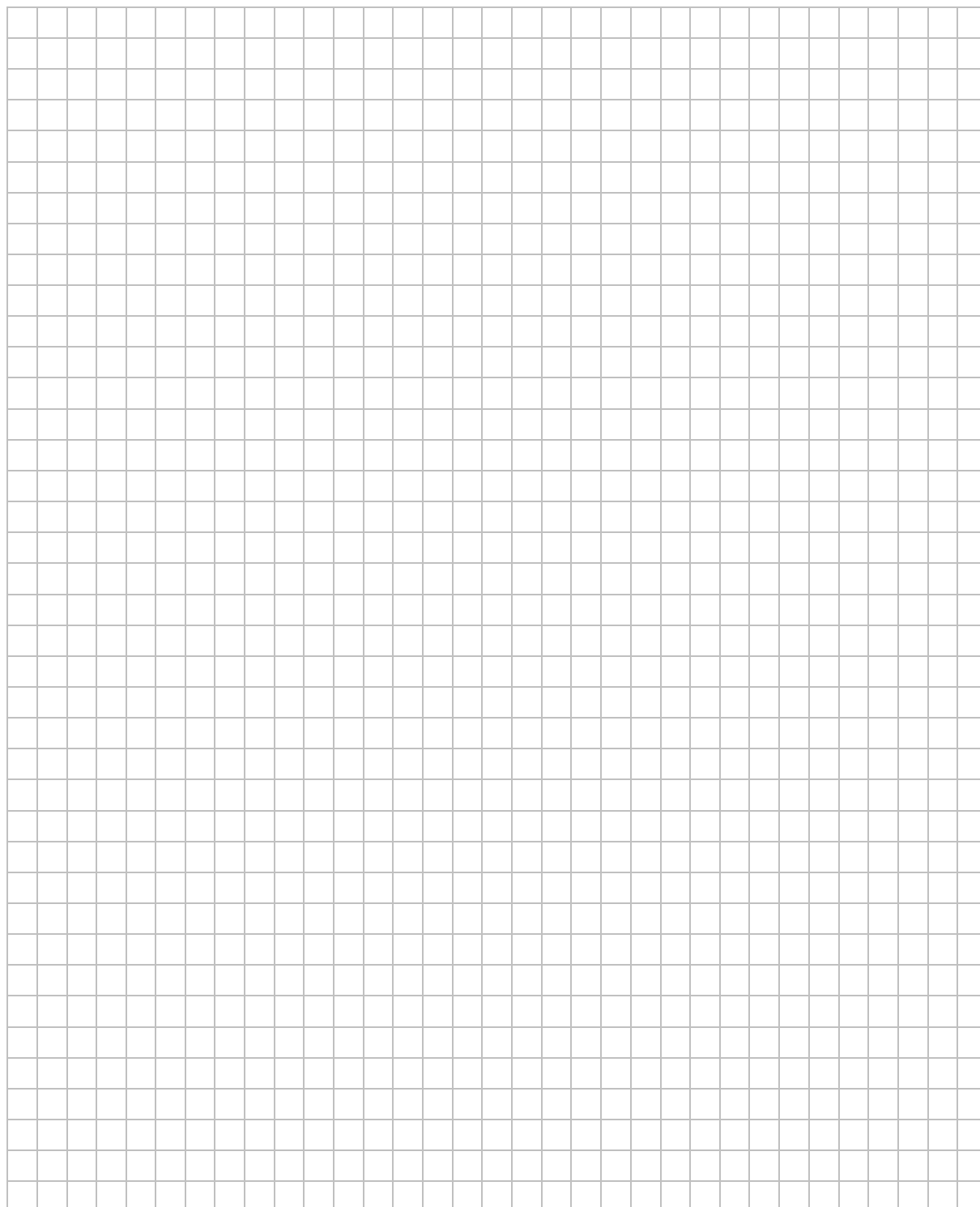
Zadanie 8. (0–3)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k i dla każdej liczby całkowitej m liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6.



Zadanie 9. (0–4)

Z liczb ośmioelementowego zbioru $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ tworzymy ośmiowyrazowy ciąg, którego wyrazy się nie powtarzają. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

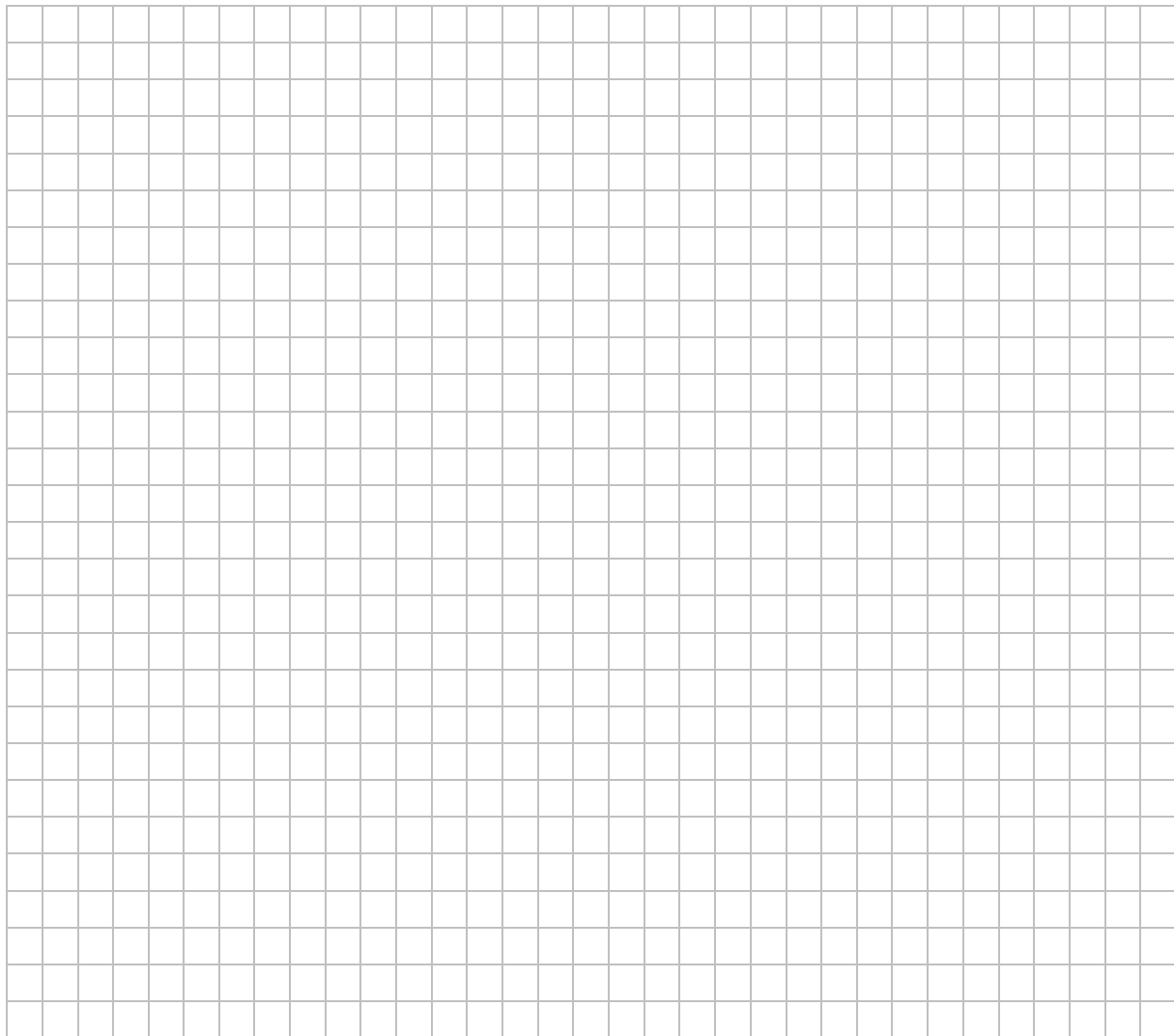
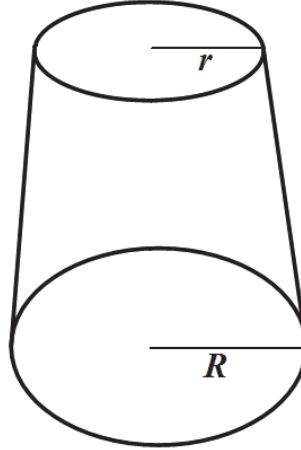


Odpowiedź:

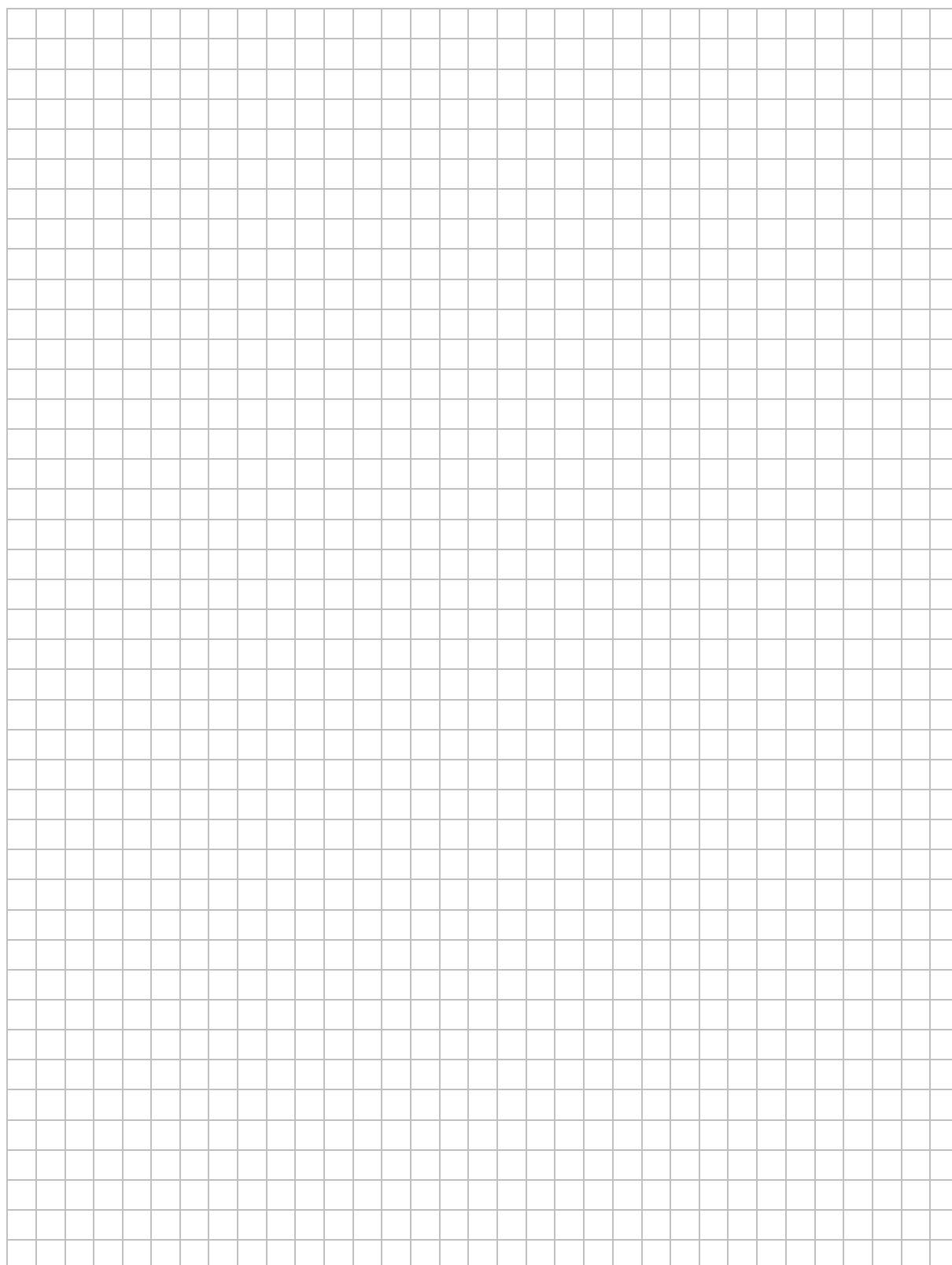
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	8.	9.
	Maks. liczba pkt	3	4
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 10. (0–4)

Objętość stożka ściętego (przedstawionego na rysunku) można obliczyć ze wzoru $V = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + rR + R^2)$, gdzie r i R są promieniami podstaw ($r < R$), a H jest wysokością bryły. Dany jest stożek ścięty, którego wysokość jest równa 10, objętość 840π , a $r = 6$. Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego tej bryły do jednej z jej podstaw.



Odpowiedź:

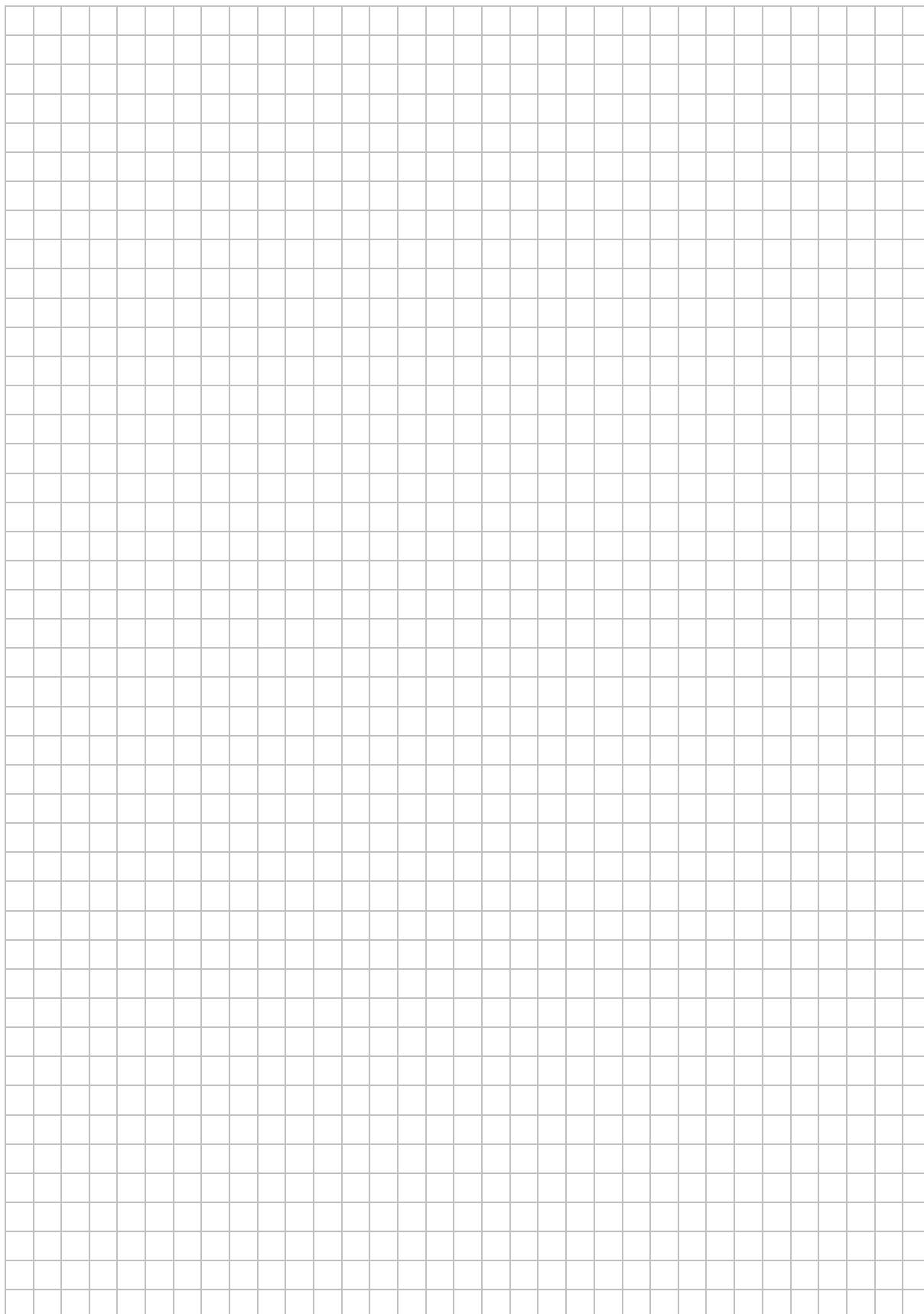
Zadanie 11. (0–4)Rozwiąż równanie $\sin 6x + \cos 3x = 2 \sin 3x + 1$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

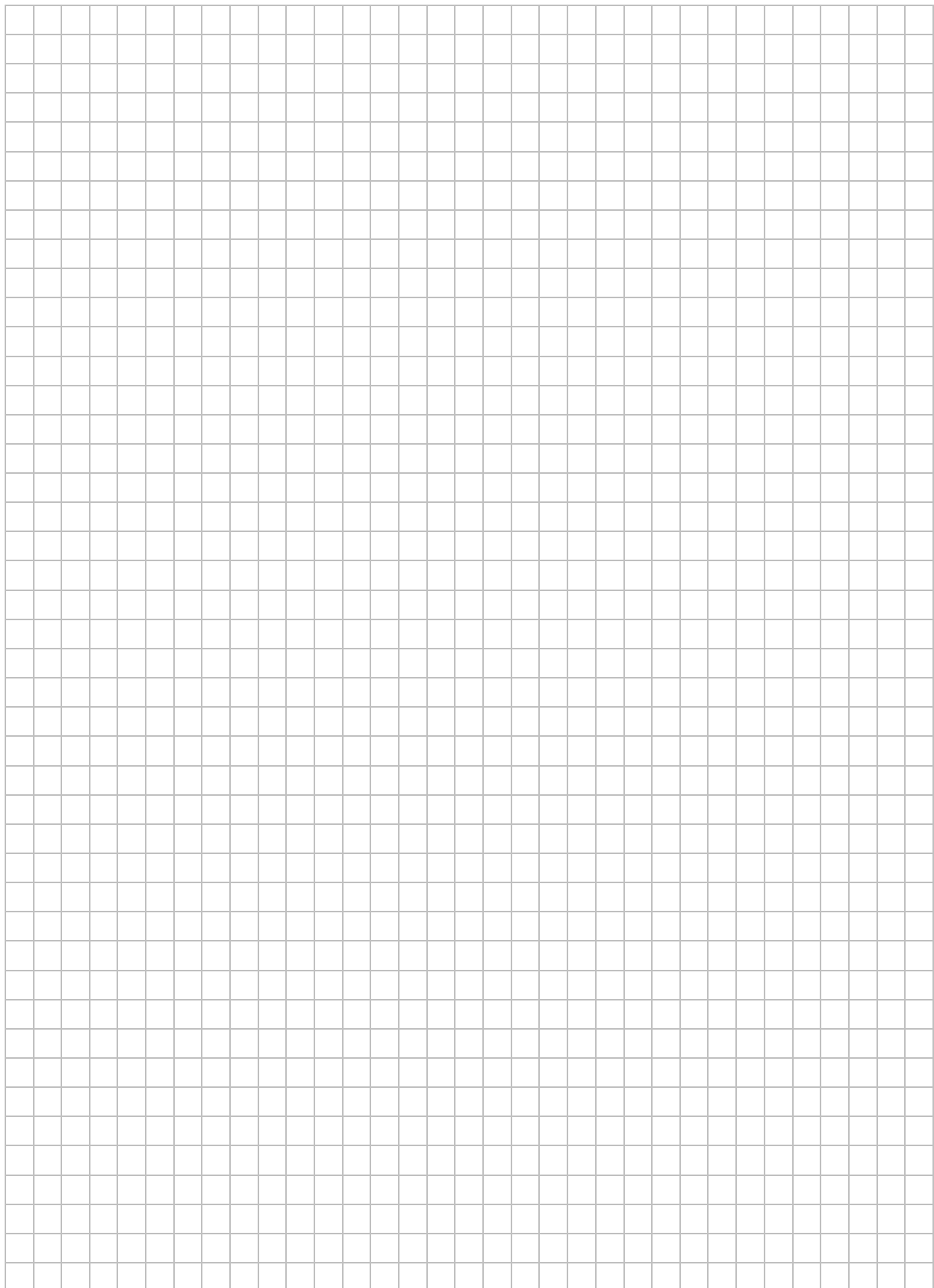
Odpowiedź:

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	10.	11.
	Maks. liczba pkt	4	4
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 12. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + (m+1)x - m^2 + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 ($x_1 \neq x_2$), spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$.





Odpowiedź:

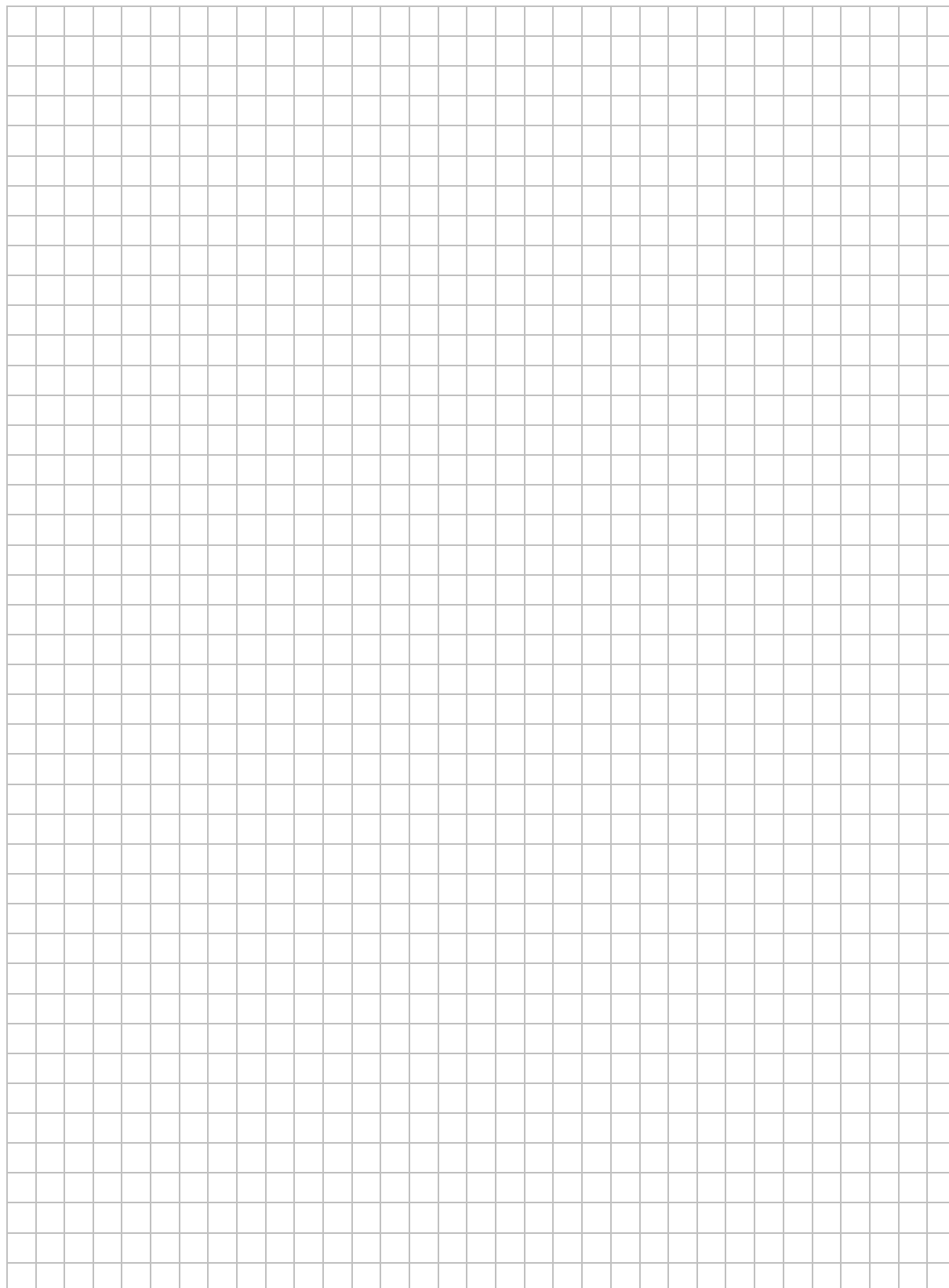
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	12.
	Maks. liczba pkt	6
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 13. (0–4)

Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, spełniają układ równań

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = -84 \\ a_4 + a_7 = 168 \end{cases}$$

Wyznacz liczbę n początkowych wyrazów tego ciągu, których suma S_n jest równa 32769.



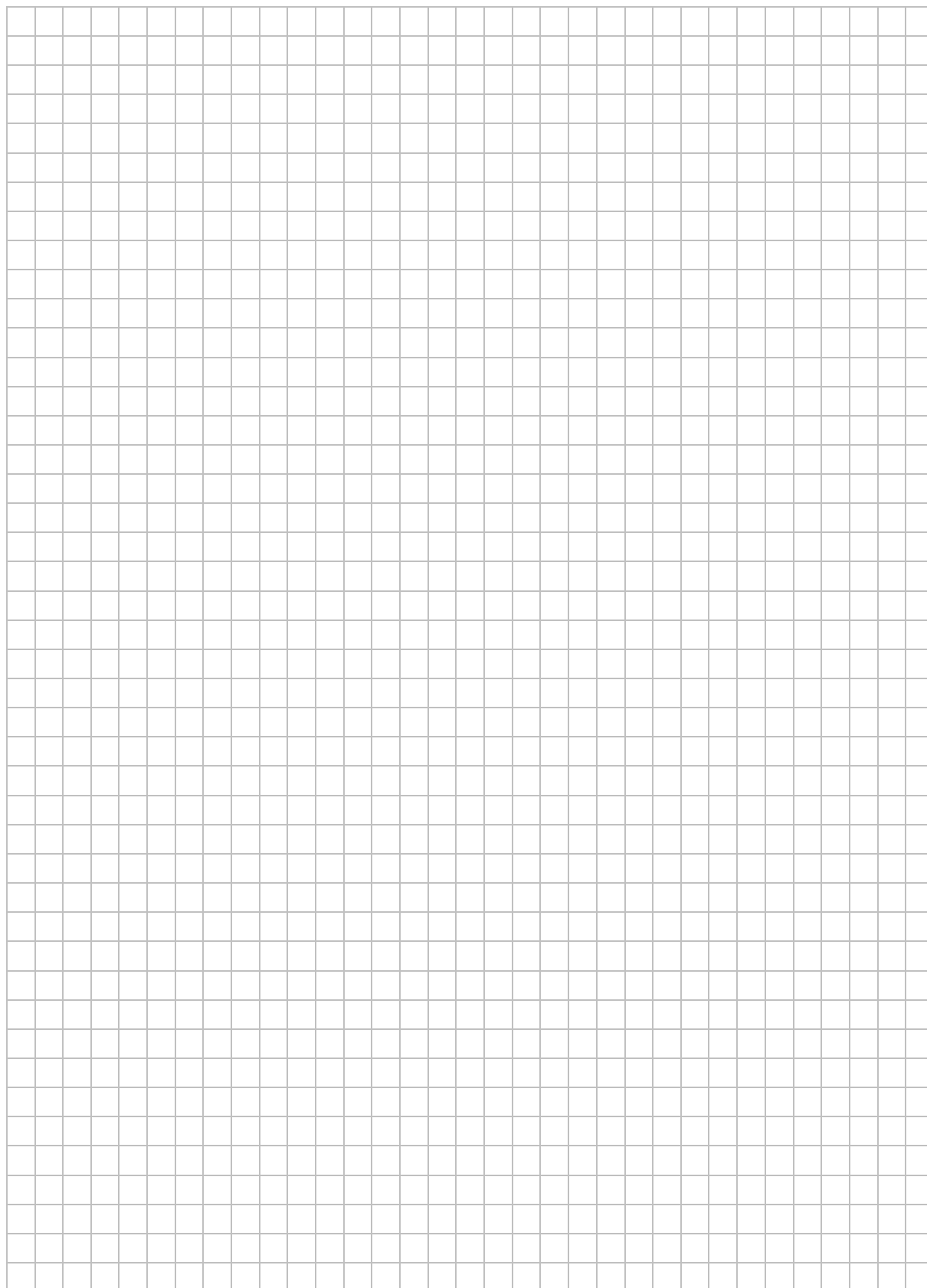


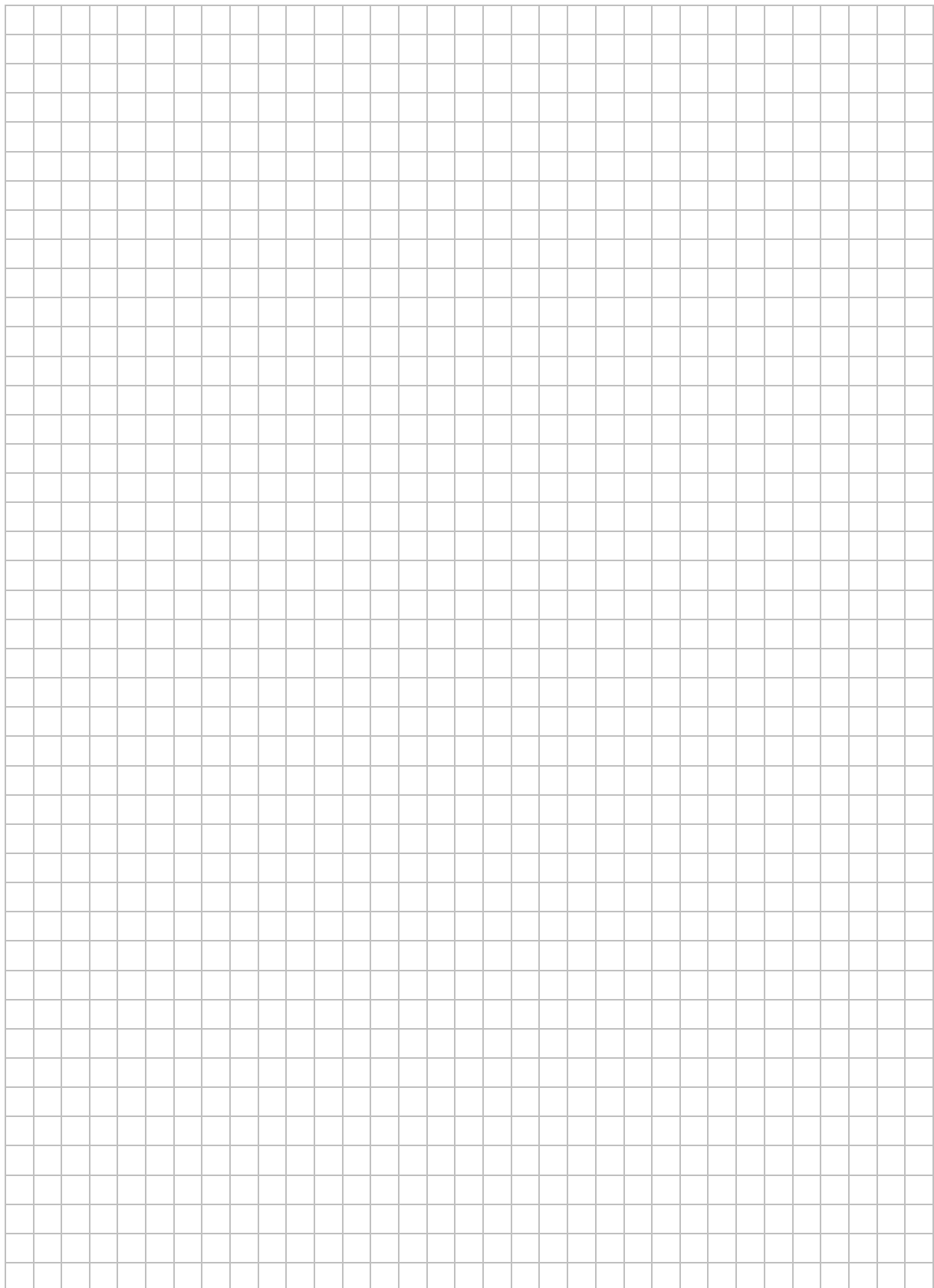
Odpowiedź:

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	13.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 14. (0–6)

Punkt $A = (7, -1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$.
Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2 + y^2 = 10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.





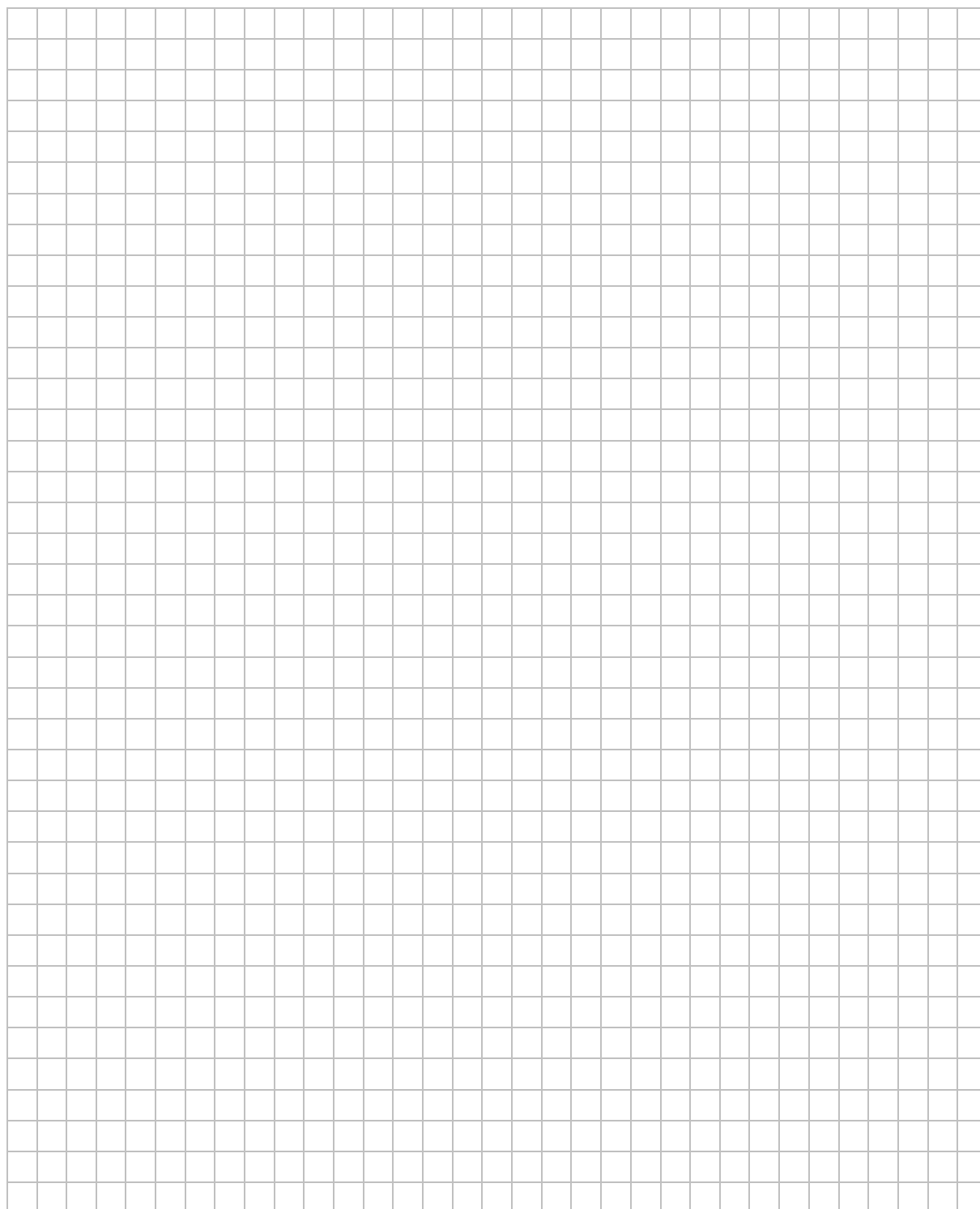
Odpowiedź:

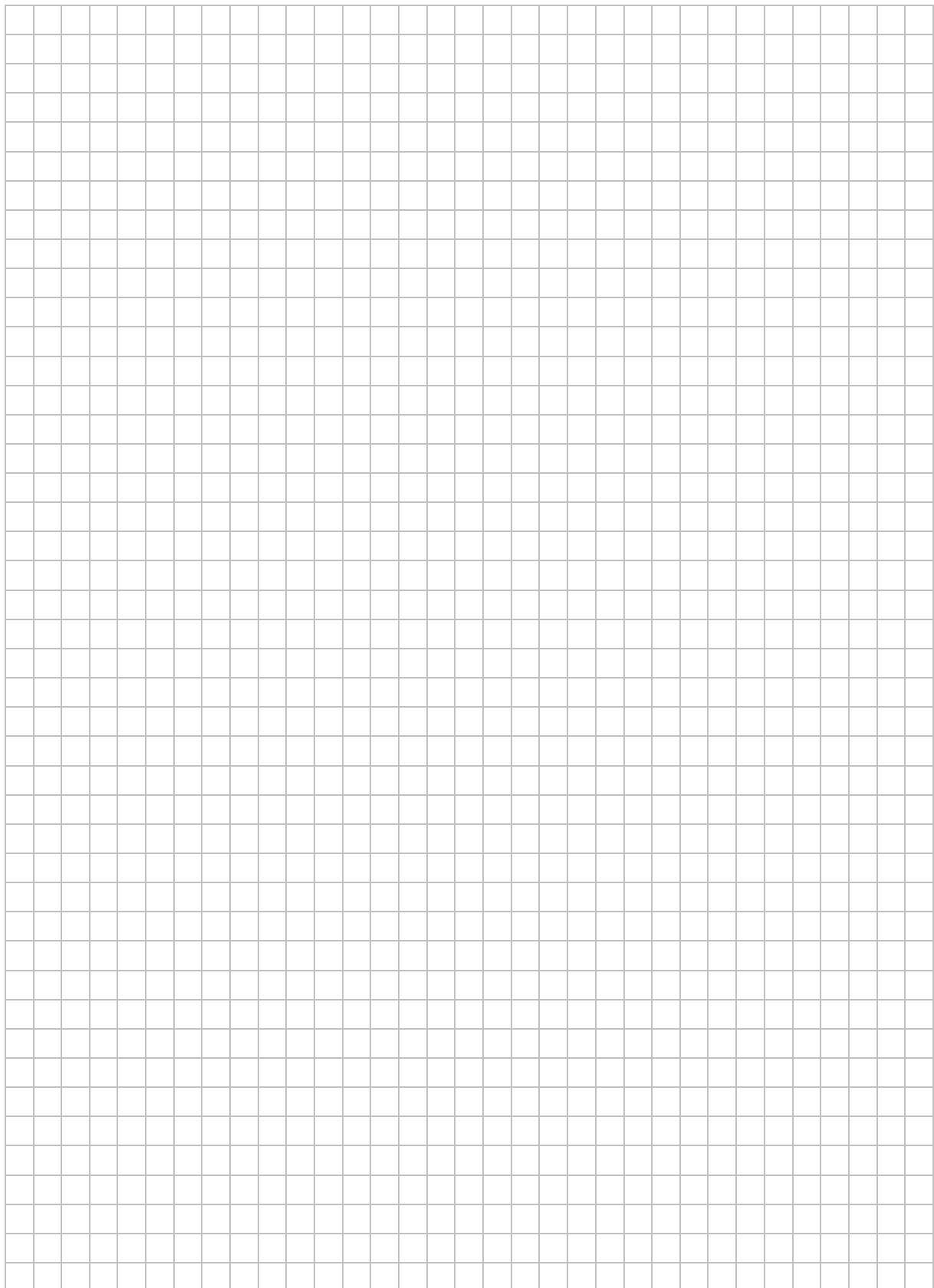
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	14.
	Maks. liczba pkt	6
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

- Wyznacz wszystkie wartości a , dla których istnieje trapez o podanych własnościach.
- Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$.
- Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.





Odpowiedź:

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	15.
	Maks. liczba pkt	7
	Uzyskana liczba pkt	

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2017/2018**

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

FORMUŁA OD 2015

(„NOWA MATURA”)

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-R1

MAJ 2018

Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (1.4).	A

Zadanie 2. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną (R1.1). ALBO 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną (R3.9).	B
--	--	---

Zadanie 3. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu (R1.2).	C
--	---	---

Zadanie 4. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych (R11.1).	D
--	--	---

Zadanie 5. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych (R11.1). 4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości) (4.2).	166
--	--	-----

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej (R11.3).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Rozważmy funkcję kwadratową f określoną wzorem $f(x) = \sqrt{3}x^2 - 1$.

Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = (x_0, y_0)$

nachylonej do osi Ox pod kątem 30° jest równy $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i jest równocześnie wartością pochodnej funkcji f w punkcie x_0 .

Wyznaczamy pochodną funkcji f : $f'(x) = 2\sqrt{3}x$.

Współrzędna x_0 punktu styczności spełnia więc równanie

$$2\sqrt{3}x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Stąd

$$x_0 = \frac{1}{6}.$$

Wartość funkcji f dla argumentu $x_0 = \frac{1}{6}$ jest równa

$$f(x_0) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{3}-36}{36}.$$

Zatem punkt P ma współrzędne: $x_0 = \frac{1}{6}$, $y_0 = \frac{\sqrt{3}-36}{36}$.

II sposób

Styczna do paraboli nachylona do osi Ox pod kątem 30° ma współczynnik kierunkowy równy $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, więc jej równanie jest postaci $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$.

Punkt P to jedyny punkt wspólny paraboli i tej stycznej, więc układ równań $y = \sqrt{3}x^2 - 1$

i $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Tak jest wtedy i tylko wtedy, gdy równanie

$\sqrt{3}x^2 - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$, czyli $\sqrt{3}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 - b = 0$ ma jedno rozwiązanie, którym jest

$$x_0 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{6}.$$

Jest to pierwsza współrzędna punktu P . Druga współrzędna tego punktu jest więc równa

$$y_0 = \sqrt{3} \left(\frac{1}{6} \right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{3}-36}{36}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający

- zapisze, że współczynnik kierunkowy stycznej jest równy $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ lub równanie

$$\text{stycznej: } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$$

albo

- wyznaczy pochodną funkcji $f: f'(x) = 2\sqrt{3}x$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający

- zapisze równanie: $2\sqrt{3}x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

albo

- zapisze równanie: $\sqrt{3}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 - b = 0$ i stwierdzi, że ma ono dokładnie jedno rozwiązanie, np. zapisze $\Delta = 0$.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający wyznaczy współrzędne punktu P : $x_0 = \frac{1}{6}$, $y_0 = \frac{\sqrt{3}-36}{36}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający błędnie wyznaczy pochodną funkcji, ale poprawnie wyznaczy współczynnik kierunkowy stycznej, to jeśli nawet konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający przyjmie, że współczynnik kierunkowy stycznej jest równy $\operatorname{tg}30^\circ$, ale przypisuje tej wielkości błędną wartość liczbową, np. zapisze $a = \sqrt{3}$ lub $a = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ itp., i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, bez żadnego innego błędu, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający błędnie zinterpretuje współczynnik kierunkowy stycznej do paraboli, np. zapisze $a = \frac{1}{2}$ lub $a = \sin\alpha$ itp., i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca to otrzymuje **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający błędnie przyjmie, że kąt nachylenia stycznej do osi Ox jest równy 150° , i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca lub rozpatruje dwie styczne o kątach nachylenia 30° i 150° do osi Ox , to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania zadania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **2 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozwiązania na żadnym etapie.

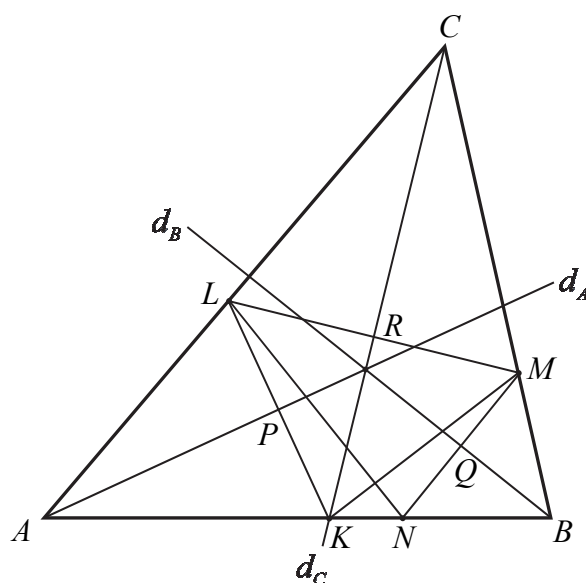
Zadanie 7. (0–3)

V. Rozumowanie
i argumentacja.

7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu (R7.1).

Przykładowe rozwiązaniaI sposób – bilans kątów

Oznaczmy miary kątów trójkąta ABC odpowiednio przez $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$, a punkt wspólny dwusiecznej d_A i odcinka KL przez P , dwusiecznej d_C i odcinka LM przez R oraz dwusiecznej d_B i odcinka MN przez Q .



Wówczas $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$, stąd $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Wtedy

$$|\sphericalangle KAP| = \alpha, \text{ zatem } |\sphericalangle AKP| = 90^\circ - \alpha \text{ i } |\sphericalangle LKN| = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$$

oraz

$$|\sphericalangle CMR| = 90^\circ - \gamma \text{ oraz } |\sphericalangle BMQ| = 90^\circ - \beta,$$

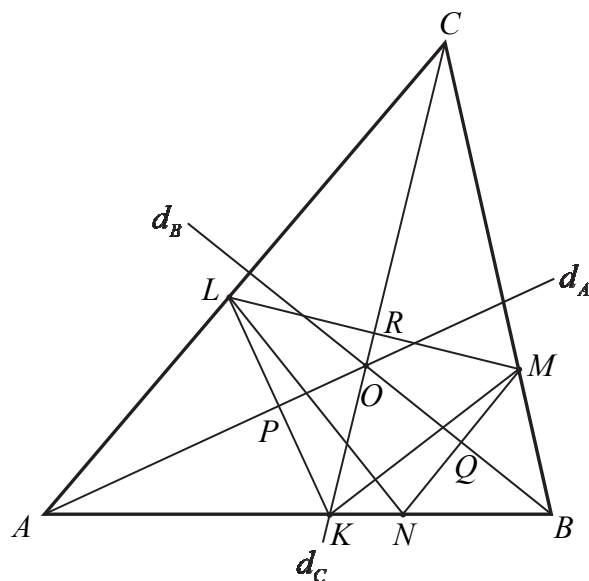
$$\text{zatem } |\sphericalangle LMN| = 180^\circ - (90^\circ - \gamma) - (90^\circ - \beta) = \beta + \gamma.$$

Suma kątów LKN i LMN jest więc równa

$$|\sphericalangle LKN| + |\sphericalangle LMN| = (90^\circ + \alpha) + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma + 90^\circ = 180^\circ.$$

To oznacza, że na czworokącie $KNML$ można opisać okrąg.

II sposób – symetralne

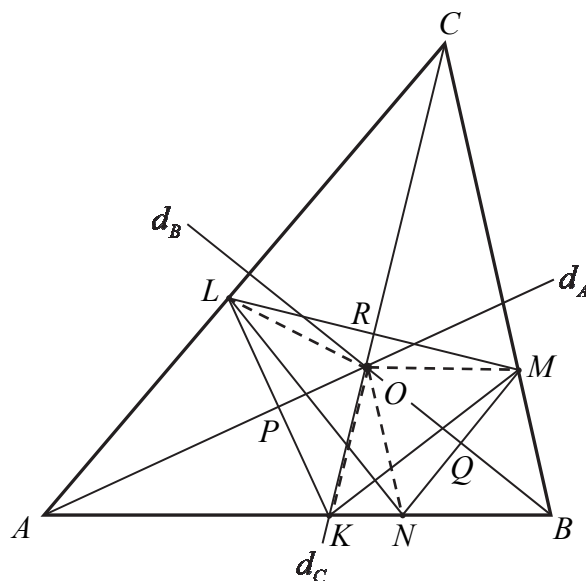


Rozważmy trójkąt KLM . Z definicji symetrii osiowej wynika, że dwusieczna d_A jest symetralną boku KL . Analogicznie dwusieczna d_C jest symetralną boku LM . Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie – oznaczmy go przez O . Czyli punkt wspólny dwusiecznych d_A i d_C (symetralnych boków trójkąta KLM) jest środkiem okręgu, którego promieniem jest w szczególności odcinek OL .

Podobnie rozważmy trójkąt LMN . Z definicji symetrii osiowej wynika, że dwusieczna d_C jest symetralną boku LM . Analogicznie dwusieczna d_B jest symetralną boku MN . Punkt wspólny tych dwusiecznych (symetralnych) jest tym samym punktem, o którym była mowa wyżej i jest oczywiście środkiem okręgu opisanego na trójkącie LMN . Zatem musi to być ten sam okrąg. Wszystkie wierzchołki czworokąta $KNML$ leżą na tym okręgu. To kończy dowód.

III sposób – równość promieni

Oznaczmy przez O punkt przecięcia się dwusiecznych kątów trójkąta ABC , punkt wspólny dwusiecznej d_A i odcinka KL przez P , dwusiecznej d_C i odcinka LM przez R oraz dwusiecznej d_B i odcinka MN przez Q .



Z definicji symetrii osiowej i z treści zadania wynika, że $|KP| = |LP|$ oraz $KL \perp AO$. Oznacza to, że trójkąty OPK i OPL są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną OP oraz pozostałe przyprostokątne są równej długości. Są to więc trójkąty przystające (na mocy cechy *bkb* przystawiania trójkątów). Stąd wynika, że $|OL| = |OK|$. Analogicznie trójkąty ORL i ORM są przystające oraz trójkąty OQM i OQN są przystające, a w konsekwencji $|OL| = |OM|$ oraz $|OM| = |ON|$. Zatem punkt O jest więc równooddalony od wszystkich wierzchołków czworokąta $KNML$, a to oznacza, że na tym czworokącie można opisać okrąg.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 p.

Zdający

- wyznaczy miarę jednego z kątów czworokąta $KNML$ w zależności od miar kątów trójkąta ABC , np.: $|\sphericalangle LKN| = 90^\circ + \alpha$

albo

- zapisze, że prosta zawierająca dwusieczną kąta trójkąta ABC jest symetralną jednego z odcinków KL , LM , MN

albo

- zapisze jedną lub dwie równości spośród: $|OL| = |OK|$, $|OL| = |OM|$, $|OM| = |ON|$

i na tym zakończy lub dalej popęlnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający

- wyznaczy miary dwóch przeciwległych kątów czworokąta $KNML$ w zależności od miar kątów trójkąta ABC , np.: $|\sphericalangle LKN| = 90^\circ + \alpha$ i $|\sphericalangle LMN| = \beta + \gamma$

albo

- zapisze, że punkt przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta ABC jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie KLM lub na trójkącie LMN , lub że jest punktem przecięcia symetralnych trzech boków czworokąta $KNML$

albo

- zapisze i uzasadni jedną lub dwie równości spośród: $|OL| = |OK|$, $|OL| = |OM|$,
 $|OM| = |ON|$

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze wszystkie równości $|OL| = |OK|$, $|OL| = |OM|$, $|OM| = |ON|$ i stąd wyciągnie wniosek, że punkt O jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $KNML$, ale nie uzasadni żadnej z tych równości (lub uzasadnienie nie będzie pełne), to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi

1. Jeżeli zdający przeprowadza dowód z wykorzystaniem bilansu kątów i korzysta z równości kątów w trójkątach równoramiennych, to może otrzymać **3 punkty** także w przypadku, gdy bez stosownego komentarza korzysta z faktu, że trójkąty są równoramienne.
2. Jeżeli zdający
 - uzależni wszystkie kąty trójkąta ABC oraz jeden z kątów czworokąta $KNML$albo
 - uzależni jeden z kątów LKN , KNM i jeden z kątów KLM , NML od kątów $\alpha = \sphericalangle AKL = \sphericalangle ALK$, $\beta = \sphericalangle BML = \sphericalangle BLM$ i $\gamma = \sphericalangle CLM = \sphericalangle CML$, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający
 - wyznaczy 2 przeciwległe kąty czworokąta $KNML$ w zależności od α , β , γ i wykaże, że $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$albo
 - wyznaczy wszystkie kąty czworokąta $KNML$ i obliczy sumę dwóch przeciwległych kątów czworokąta $KNML$,to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 8. (0–3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias (R2.3). SP2. Działania na liczbach naturalnych. Zdający rozpoznaje liczby naturalne podzielne przez 2, 3 (SP2.3).
--------------------------------	---

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zauważmy, że $k^3m - km^3 = km(k^2 - m^2) = km(k+m)(k-m)$.

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów:

- uzasadnienie podzielności przez 2;
- uzasadnienie podzielności przez 3.

Podzielność przez 2.

Gdy którakolwiek z liczb k, m jest parzysta, to iloczyn $km(k^2 - m^2)$ jest parzysty, a gdy obie liczby k, m są nieparzyste, to ich suma $k+m$ jest liczbą parzystą, więc iloczyn $km(k+m)(k-m)$ jest podzielny przez 2.

Podzielność przez 3. (I sposób)

Dowód przeprowadzimy w czterech rozłącznych sytuacjach: A, B, C, D.

- Którakolwiek z liczb k, m jest podzielna przez 3
Wtedy iloczyn $km(k^2 - m^2)$ jest podzielny przez 3.
- Obie liczby k, m przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1
Wtedy liczba $k-m$ jest podzielna przez 3, więc iloczyn $km(k+m)(k-m)$ jest podzielny przez 3.
- Obie liczby k, m przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2
Wtedy liczba $k-m$ jest podzielna przez 3, więc iloczyn $km(k+m)(k-m)$ jest podzielny przez 3.
- Jedna z liczb k, m przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, a druga przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2
Wtedy liczba $k+m$ jest podzielna przez 3, więc iloczyn $km(k+m)(k-m)$ jest podzielny przez 3.

Podzielność przez 3. (II sposób)

Dowód przeprowadzimy w dwóch rozłącznych sytuacjach: E, F.

- Którakolwiek z liczb k, m jest podzielna przez 3.
Wtedy iloczyn $km(k^2 - m^2)$ jest podzielny przez 3.
- Żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 3.
Wtedy kwadrat każdej z nich przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, więc różnica $k^2 - m^2$ jest podzielna przez 3.

Wykazaliśmy zatem, że liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 2 i przez 3, więc jest podzielna przez $2 \cdot 3$, czyli przez 6. To kończy dowód.

II sposób

Zauważmy, że

$$k^3m - km^3 = km(k^2 - 1 + 1 - m^2) = km(k^2 - 1) - km(m^2 - 1) = km(k-1)(k+1) - km(m-1)(m+1)$$

Iloczyn $k(k-1)(k+1)$ to iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, więc dokładnie jedna z nich jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna jest podzielna przez 2, więc iloczyn jest podzielny przez 2 i przez 3, a więc jest podzielny przez 6. Analogicznie iloczyn $m(m-1)(m+1)$ jest podzielny przez 6. Różnica dwóch liczb podzielnych przez 6 jest podzielna przez 6. To kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
jeśli

- uzasadni podzielność przez 2

albo

- uzasadni podzielność przez 3 w dwóch przypadkach spośród A, B, C, D,

albo

- uzasadni podzielność przez 3 w przypadku F.

Zdający otrzymuje 2 p.
jeśli

- uzasadni podzielność przez 2 i uzasadni podzielność przez 3 w dwóch przypadkach spośród A, B, C, D

albo

- uzasadni podzielność przez 2 i uzasadni podzielność przez 3 w przypadku F,

albo

- uzasadni podzielność przez 3,

albo

- zapisze liczbę $k^3m - km^3$ w postaci $km(k-1)(k+1) - km(m-1)(m+1)$.

Zdający otrzymuje 3 p.
przeprowadzi pełne rozumowanie uzasadniające podzielność przez 6.

Uwagi

1. Akceptujemy sytuację, w której zdający stwierdza bez uzasadnienia, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 6 oraz różnica liczb podzielnych przez 6 jest podzielna przez 6.
2. Jeżeli zdający rozważa reszty z dzielenia liczb k i m przez 6 i udowodni podzielność przez 6 w jednym z poniższych 5 przypadków:
 - dokładnie jedna z liczb k, m jest podzielna przez 6 lub obie liczby k, m dają przy dzieleniu przez 6 tę samą resztę;
 - żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby $k^3m - km^3$ można wnioskować na podstawie iloczynu liczb k, m ;
 - żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby $k^3m - km^3$ można wnioskować na podstawie sumy liczb k, m ;
 - żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby $k^3m - km^3$ można wnioskować na podstawie sumy i iloczynu liczb k, m ;
 - żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby $k^3m - km^3$ można wnioskować na podstawie różnicy i iloczynu liczb k, m ,to otrzymuje **1 punkt**.

3. Jeżeli zdający rozważa reszty z dzielenia liczb k i m przez 6 i udowodni podzielność przez 6 w trzech z poniższych 5 przypadków:
- dokładnie jedna z liczb k , m jest podzielna przez 6 lub obie liczby k , m dają przy dzieleniu przez 6 tę samą resztę;
 - żadna z liczb k , m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby $k^3m - km^3$ można wnioskować na podstawie iloczynu liczb k , m ;
 - żadna z liczb k , m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby $k^3m - km^3$ można wnioskować na podstawie sumy liczb k , m ;
 - żadna z liczb k , m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby $k^3m - km^3$ można wnioskować na podstawie sumy i iloczynu liczb k , m ;
 - żadna z liczb k , m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby $k^3m - km^3$ można wnioskować na podstawie różnicy i iloczynu liczb k , m ,
- to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 9. (0–4)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1). Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zdarzeniami elementarnymi są permutacje (bez powtórzeń) zbioru ośmioelementowego $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 8!$.

Niech A będzie zdarzeniem, polegającym na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Ustalmy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A .

I metoda

W zbiorze Z jest 5 liczb nieparzystych, więc możemy je ustawić w ciąg na $5!$ sposobów. Otrzymamy wtedy sytuację:

(1) n (2) n (3) n (4) n (5) n (6)

Pierwszą z pozostałych liczb (parzystych) zbioru Z możemy ustawić na jednym z sześciu miejsc (1) – (6), drugą na jednym z pozostałych pięciu, a trzecią na jednym z pozostałych czterech.

Zatem $|A| = 5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

II metoda

W zbiorze Z jest 5 liczb nieparzystych, więc możemy je ustawić w ciąg na $5!$ sposobów.

Otrzymamy wtedy sytuację:

(1) n (2) n (3) n (4) n (5) n (6)

Trzy pozostałe liczby (parzyste) ze zbioru Z musimy ustawić na wybranych trzech miejscach spośród sześciu miejsc (1) – (6). Te trzy miejsca możemy wybrać na $\binom{6}{3}$ sposobów. Na tych trzech ustalonych miejscach możemy trzy liczby parzyste ze zbioru Z ustawić na $3!$ sposobów.

Zatem $|A| = 5! \cdot \binom{6}{3} \cdot 3!$.

III metoda (ustalenie kolejności parzystych, a następnie ustalenie pozycji parzystych)

W zbiorze Z mamy 3 liczby parzyste: 2, 4, 6. Możemy ustawić je w kolejności na $3! = 6$ sposobów. Jedną z takich możliwości jest kolejność: 2, 4, 6.

Wypiszmy wszystkie przypadki ustawienia tych trzech liczb w kolejności 2, 4, 6 w ciągu 8-wyrazowym:

(a) 2 na pierwszym miejscu

2 – 4 – 6 – – – , 2 – 4 – – 6 – – , 2 – 4 – – – 6 – , 2 – 4 – – – – 6 , 2 – – 4 – 6 – – ,
2 – – 4 – – 6 – , 2 – – 4 – – – 6 , 2 – – – 4 – 6 – , 2 – – – 4 – – 6 , 2 – – – – 4 – 6 ,

(b) 2 na drugim miejscu

– 2 – 4 – 6 – – , – 2 – 4 – – 6 – , – 2 – 4 – – – 6 , – 2 – – 4 – 6 – , – 2 – – 4 – – 6 ,
– 2 – – – 4 – 6 ,

(c) 2 na trzecim miejscu

– – 2 – 4 – 6 – , – – 2 – 4 – – 6 , – – 2 – – 4 – 6 ,

(d) 2 na czwartym miejscu

– – – 2 – 4 – 6 .

Łącznie mamy 20 przypadków ustawienia w ciągu 8-wyrazowym trzech liczb parzystych – 2, 4, 6 – w kolejności 2, 4, 6.

Ponieważ mamy 6 możliwości ustalenia kolejności dla trzech liczb 2, 4, 6, więc liczby parzyste ze zbioru Z możemy ustawić na $6 \cdot 20$ sposobów.

Do ustawionych liczb parzystych na wolne miejsca ustawiamy liczby nieparzyste, a możemy to zrobić na $5!$ sposobów.

Zatem $|A| = 6 \cdot 20 \cdot 5!$.

IV metoda (ustalenie pozycji parzystych)

Wypiszmy wszystkie przypadki wyboru trzech miejsc, spośród ośmiu, dla liczb parzystych, z uwzględnieniem warunku, że żadne dwie parzyste nie sąsiadują ze sobą.

(a) pierwsza liczba parzysta na pierwszym miejscu

p – p – p – – – , p – p – – p – – , p – p – – – p – , p – p – – – – p , p – – p – p – – ,
p – – p – – p – , p – – p – – – p , p – – – p – p – , p – – – p – – p , p – – – – p – p ,

(b) pierwsza liczba parzysta na drugim miejscu

– p – p – p – – , – p – p – – p – , – p – p – – – p , – p – – p – p – , – p – – p – – p ,
– p – – – p – p ,

(c) pierwsza liczba parzysta na trzecim miejscu

– – p – p – p – , – – p – p – – p , – – p – – p – p ,

(d) pierwsza liczba parzysta na czwartym miejscu

– – – p – p – p .

Łącznie mamy 20 przypadków ustalenia w ciągu 8-wyrazowym pozycji liczb parzystych.

Zatem $|A| = 20 \cdot 3! \cdot 5!$.

Uwaga! Te same przypadki wyboru uzyskamy, wypisując wszystkie ustawienia liczb parzystych i nieparzystych przy założeniu, że rozpoczynamy najpierw od liczby parzystej (10 przypadków), a następnie od nieparzystej (kolejne 10 przypadków). Ponadto należy pamiętać, że przedstawione tu przypadki ustawień liczb parzystych (a tym samym i nieparzystych) mogą być przedstawione jako gałęzie drzewa probabilistycznego z 20 gałęziami.

V metoda (przerwy między parzystymi)

Trzy liczby parzyste musimy rozdzielić pięcioma nieparzystymi, przy czym nieparzyste możemy umieszczać także przed wszystkimi parzystymi lub po wszystkich parzystych. Mamy zatem 4 usytuowania dla liczb nieparzystych.

Wypiszmy najpierw przypadki uwzględniające liczbę pozycji dla liczb nieparzystych w poszczególnych usytuowaniach (cyfra oznacza liczbę miejsc zajętych przez liczby nieparzyste, litera p oznacza liczbę parzystą).

0-p-1-p-1-p-3, 0-p-1-p-2-p-2, 0-p-1-p-3-p-1, 0-p-1-p-4-p-0, 0-p-2-p-1-p-2, 0-p-2-p-2-p-1, 0-p-2-p-3-p-0, 0-p-3-p-1-p-1, 0-p-3-p-2-p-0, 0-p-4-p-1-p-0, 1-p-1-p-1-p-1, 1-p-1-p-2-p-1, 1-p-1-p-3-p-0, 1-p-2-p-1-p-1, 1-p-2-p-2-p-0, 1-p-3-p-1-p-0, 2-p-1-p-1-p-1, 2-p-1-p-2-p-0, 2-p-2-p-1-p-0, 3-p-1-p-1-p-0

Łącznie mamy 20 takich przypadków.

Zatem $|A| = 20 \cdot 3! \cdot 5!$.

Obliczamy prawdopodobieństwo:

$$P(A) = \frac{20 \cdot 3! \cdot 5!}{8!} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}.$$

II sposób (zdarzenie przeciwne)

Zdarzeniami elementarnymi są permutacje (bez powtórzeń) zbioru ośmioelementowego $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 8!$

Niech A będzie zdarzeniem, polegającym na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu.

Zdarzeniem przeciwnym A' jest otrzymanie w wyniku permutacji zbioru Z ciągu, w którym liczby parzyste są sąsiednimi wyrazami ciągu, tzn.

I: wszystkie trzy liczby parzyste będą kolejnymi wyrazami ciągu

albo

II. dwie liczby parzyste będą kolejnymi wyrazami ciągu, a trzecia liczba parzysta nie będzie sąsiadować z żadną z nich.

W sytuacji I miejsca dla liczb parzystych wybieramy na 6 sposobów, ustawiamy na tych miejscach liczby parzyste na 3! sposobów, a pozostałe liczby ustawiamy na pięciu miejscach na 5! sposobów.

W sytuacji II. dla sąsiadujących liczb parzystych wybieramy miejsca na 7 sposobów:

m_1 i m_2 , m_2 i m_3 , m_3 i m_4 , m_4 i m_5 , m_5 i m_6 , m_6 i m_7 , m_7 i m_8 .

Miejsce dla trzeciej parzystej liczby możemy wybrać: na 5 sposobów wtedy, gdy parzyste liczby sąsiadują na miejscach m_1 i m_2 albo na miejscach m_7 i m_8 oraz na 4 sposoby w każdej z pozostałych możliwości.

Liczby parzyste możemy rozstawić na wybranych miejscach na 3! sposobów, a pozostałe liczby ustawiamy na pięciu miejscach na 5! sposobów.

Wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A' jest:

$$6 \cdot 3! \cdot 5! + 2 \cdot 5 \cdot 3! \cdot 5! + 5 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 5!.$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A :

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{36 \cdot 3! \cdot 5!}{8!} = 1 - \frac{36 \cdot 6}{6 \cdot 7 \cdot 8} = 1 - \frac{36}{56} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}.$$

Uwaga! Zdający może wypisywać przypadki, w których wystąpią zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A' , stosując metody analogiczne do metod III, IV, V z I sposobu rozwiązania, i uwzględnić 36 rozłącznych przypadków.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- zapisze $|\Omega| = 8!$

albo

- wypisze przynajmniej 11 różnych przypadków spośród 20, gdy rozpatruje zdarzenie A

albo

- wypisze przynajmniej 19 różnych przypadków spośród 36, gdy rozpatruje zdarzenie A' ,

albo

- zapisze, że jest $\binom{6}{3}$ lub $6 \cdot 5 \cdot 4$ przypadków, gdy rozpatruje zdarzenie A (lub $6 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 4$ przypadków, gdy rozpatruje zdarzenie A'),

albo

- zapisze iloczyn $3! \cdot 5!$ lub w inny sposób zaznaczy uwzględnienie iloczynu $3! \cdot 5!$, wynikającego z permutacji liczb parzystych i liczb nieparzystych na wybranych dla nich miejscach,

albo

- narysuje drzewo z wyróżnionymi co najmniej 11 różnymi istotnymi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu A (albo z wyróżnionymi co najmniej 19 różnymi istotnymi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu A'),

albo

- narysuje niepełne drzewo (może wystąpić brak istotnych gałęzi odpowiadających zdarzeniu A lub A'), ale na wszystkich odcinkach co najmniej jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa, przy czym gałąź ta musi uwzględniać jeden z przypadków: wylosowano 3 parzyste liczby lub wylosowano 7 liczb

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający

- zapisze $|\Omega| = 8!$ i wypisze przynajmniej 11 różnych przypadków spośród 20, gdy rozpatruje zdarzenie A ,

albo

- zapisze $|\Omega| = 8!$ i wypisze przynajmniej 19 różnych przypadków spośród 36, gdy rozpatruje zdarzenie A' ,

albo

- zapisze $|\Omega| = 8!$ i zapisze, że jest $\binom{6}{3}$ lub $6 \cdot 5 \cdot 4$ przypadków, gdy rozpatruje zdarzenie A (lub $6 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 4$ przypadków, gdy rozpatruje zdarzenie A'),

albo

- zapisze $|A| = \binom{6}{3} \cdot 3! \cdot 5!$ lub $|A| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5!$ lub $|A| = 20 \cdot 3! \cdot 5!$ lub
 $|A'| = (6 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 4) \cdot 3! \cdot 5!$ lub $|A'| = 36 \cdot 3! \cdot 5!$,

albo

- narysuje drzewo z wyróżnionymi co najmniej 11 różnymi istotnymi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu A (albo z wyróżnionymi co najmniej 19 różnymi istotnymi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu A') i na wszystkich odcinkach co najmniej jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa, przy czym gałąź ta musi uwzględniać jeden z przypadków: wylosowano 3 parzyste liczby lub wylosowano 7 liczb

i na tym zakończy lub dalej popelnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający

- zapisze $|\Omega| = 8!$ i zapisze $|A| = \binom{6}{3} \cdot 3! \cdot 5!$ lub $|A| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5!$ lub $|A| = 20 \cdot 3! \cdot 5!$
lub $|A'| = (6 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 4) \cdot 3! \cdot 5!$ lub $|A'| = 36 \cdot 3! \cdot 5!$

albo

- zapisze prawdopodobieństwo zdarzenia A (albo A') zgodnie z „metodą drzewkową”.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy prawdopodobieństwo: $P(A) = \frac{5}{14}$.

Uwagi

1. Możemy też rozpatrywać model probabilistyczny, w którym zdarzeniem elementarnym jest 3 elementowy podzbiór zbioru 8 elementowego (nie uwzględniamy wówczas kolejności ustawienia liczb nieparzystych ani kolejności ustawienia liczb parzystych, a jedynie pozycje zajmowane przez te liczby). Wtedy $|\Omega| = \binom{8}{3} = 56$, $|A| = \binom{6}{3} = 20$,
 $P(A) = \frac{5}{14}$.
2. Jeżeli zdający błędnie założy, że podany w treści zadania ośmioelementowy zbiór Z zawiera 4 liczby parzyste i 4 liczby nieparzyste (np. założy, że zbiór Z zawiera liczbę 8 zamiast 9) i rozwiąże zadanie do końca, otrzymując $P(A) = \frac{5 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} = \frac{1}{14}$, to otrzymuje **2 punkty**. Zdający otrzymuje w tej sytuacji **1 punkt** tylko za zapisanie $|\Omega| = 8!$.
3. Jeżeli zdający błędnie założy, że podany w treści zadania zbiór Z jest 9-elementowy (i zawiera 4 liczby parzyste i 5 liczb nieparzystych) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający zapisze $|\Omega| = 8!$ oraz rozpatrując zdarzenie A' rozważy trzy sytuacje:
I. wszystkie trzy liczby parzyste są kolejnymi wyrazami ciągu;
II. dwie liczby parzyste są dwoma skrajnymi (pierwszym i drugim lub siódmym i ósmym) wyrazami ciągu, a trzecia liczba parzysta nie sąsiaduje bezpośrednio z żadną z nich;
III. dwie liczby parzyste są dwoma kolejnymi, ale nie skrajnymi wyrazami ciągu, a trzecia parzysta nie sąsiaduje bezpośrednio z żadną z nich
oraz zapisze sposób zliczania tych ciągów w każdej z tych trzech sytuacji, uwzględniający permutacje liczb parzystych i liczb nieparzystych i jednocześnie gwarantujący to, że żaden ciąg nie zostanie policzony wielokrotnie;
a ponadto nie ustali poprawnej liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A' , to otrzymuje **2 punkty**.

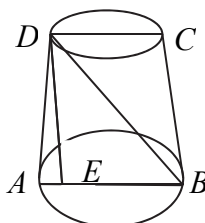
5. Jeżeli zdający rozważy zdarzenie A i wypisuje przynajmniej 12 przypadków, ale jeden z nich zapisuje dwukrotnie, to otrzymuje przynajmniej **1 punkt**. Dotyczy to także sytuacji wypisania 21 przypadków.

Zadanie 10. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (9.3). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą (3.4).
-----------------------------------	---

Przykładowe rozwiązanie

Przekrojem osiowym stożka jest trapez równoramienny $ABCD$. Niech DE oznacza wysokość stożka opuszczoną z punktu D .



Po podstawieniu danych do wzoru na objętość otrzymujemy równanie kwadratowe

$$\frac{1}{3}\pi \cdot 10 \cdot (6^2 + 6R + R^2) = 840\pi.$$

Stąd

$$R^2 + 6R - 216 = 0.$$

Rozwiązując je, otrzymujemy

$$\Delta = 36 + 4 \cdot 216 = 900, \sqrt{\Delta} = 30,$$

$$R = \frac{-6 - 30}{2} = -18 < 0 \text{ lub } R = \frac{-6 + 30}{2} = 12.$$

Przekrojem osiowym tego stożka jest trapez równoramienny o podstawach długości 24 i 12 oraz wysokości 10. Długość odcinka EB jest równa

$$|EB| = R + r = 12 + 6 = 18.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BDE otrzymujemy

$$|BD| = \sqrt{10^2 + 18^2} = \sqrt{424} = 2\sqrt{106}.$$

$$\text{Zatem } \cos|\sphericalangle DBE| = \frac{18}{2\sqrt{106}} = \frac{9}{\sqrt{106}}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający wyznaczy promień R większej podstawy: $R = 12$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający wyznaczy promień R większej podstawy: $R = 12$ i długość odcinka EB : $|EB| = 18$,
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający obliczy

- długość przekątnej trapezu $|BD| = 2\sqrt{106}$

albo

- obliczy tangens kąta DBE : $\operatorname{tg}|\sphericalangle DBE| = \frac{5}{9}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy $\cos|\sphericalangle DBE| = \frac{9}{\sqrt{106}}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający zapisze cosinus kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego tego stożka ściętego do jednej z jego podstaw w zależności od R , r , H i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd merytoryczny przy zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa, pisząc np.: $|EB|^2 + |BD|^2 = |ED|^2$, albo popełni błąd merytoryczny przez zastosowanie nieistniejącego wzoru "pierwiastek sumy = suma pierwiastków", to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający błędnie przyjmie, że wysokością stożka jest odcinek AD , to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, o ile poprawnie obliczy R .
4. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania zadania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **3 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozwiązania na żadnym etapie.
5. Jeżeli zdający obliczy długość R oraz długość ramienia trapezu, to może otrzymać **2 punkty**. Jeżeli zdający obliczy długość R oraz długość ramienia trapezu, a ponadto obliczy długość BD i zapisze twierdzenie cosinusów, to może otrzymać **3 punkty**.
6. Jeżeli zdający błędnie przyjmuje, że średnica górnej podstawy stożka ściętego ma długość 6, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
7. Jeżeli zdający błędnie przyjmuje, że długość rzutu prostokątnego ramienia trapezu na dłuższą podstawę to różnica średnic dolnej i górnej podstawy zamiast połowy tej różnicy i nie jest to błąd wynikający z rachunków, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Zadanie 11. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów (R6.5). Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.6).
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązanie

Przekształcamy równanie w sposób równoważny

$$\begin{aligned} \sin 6x + \cos 3x &= 2 \sin 3x + 1, \\ 2 \sin 3x \cos 3x + \cos 3x &= 2 \sin 3x + 1, \\ \cos 3x(2 \sin 3x + 1) &= 2 \sin 3x + 1, \\ (2 \sin 3x + 1)(\cos 3x - 1) &= 0, \\ \sin 3x &= -\frac{1}{2} \text{ lub } \cos 3x = 1. \end{aligned}$$

Stąd $3x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ lub $3x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ lub $3x = 2k\pi$, k – liczba całkowita.

$$\text{Zatem } x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ lub } x = \frac{11\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ lub } x = \frac{2k\pi}{3}.$$

W przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ mamy następujące rozwiązania równania: $x = \frac{7\pi}{18}$, $x = \frac{11\pi}{18}$, $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający zastosuje wzór na sinus kąta podwojonego i zapisze równanie w postaci $2 \sin 3x \cos 3x + \cos 3x = 2 \sin 3x + 1$, i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze dwa równania $\sin 3x = -\frac{1}{2}$, $\cos 3x = 1$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający

- zapisze wszystkie rozwiązania równań $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ oraz $\cos 3x = 1$ w zbiorze liczb rzeczywistych $x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ lub $x = \frac{11\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ lub $x = \frac{2k\pi}{3}$

albo

- zapisze dwa równania $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ oraz $\cos 3x = 1$ i jedno z nich rozwiąże w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający zapisze wszystkie rozwiązania równania w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$: $x = \frac{7\pi}{18}$, $x = \frac{11\pi}{18}$,

$$x = 0, x = \frac{2\pi}{3}.$$

Uwagi

1. Jeżeli zdający poprawnie stosuje wzór na sinus kąta podwojonego, zapisze tylko jedno z równań $\cos 3x = 1$, $\sin 3x = -\frac{1}{2}$, to otrzymuje

1 punkt, jeśli rozwiąże to równanie w **R**;

2 punkty, jeśli rozwiąże to równanie w $\langle 0, \pi \rangle$.

2. Jeżeli zdający poprawnie stosuje wzór na sinus kąta podwojonego i poprawnie zapisze równanie równoważne w postaci, w której z jednej strony występuje iloczyn, a z drugiej zero, ale w wyniku błędów zapisuje jedno równanie lub dwa równania z niewłaściwym znakiem przy stałej, to otrzymuje:

3 punkty, o ile konsekwentnie rozwiąże obydwa równania w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$;

2 punkty, o ile konsekwentnie rozwiąże dwa równania w **R** lub konsekwentnie rozwiąże jedno równanie w $\langle 0, \pi \rangle$;

1 punkt, o ile konsekwentnie rozwiąże jedno równanie w **R**.

4. Jeżeli zdający wyznacza rozwiązania równań $\cos \alpha = 1$ oraz $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, gdzie $\alpha = 3x$, w przedziale $\langle 0, 3\pi \rangle$ i na tym poprzestaje lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.

5. Jeżeli zdający przy wyznaczaniu rozwiązań równań $\cos 3x = 1$ oraz $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ zapisuje poprawnie serię rozwiązań pierwszego z nich (z cos) oraz jedną serię rozwiązań drugiego (z sin), a następnie konsekwentnie wyznacza przynajmniej 4 rozwiązania równania z treści zadania w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.

Zadanie 12. (0–6)

III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a (R3.1).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązanie

Równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste, gdy jego wyróżnik jest dodatni, czyli

$$\Delta = (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m^2 + 1) > 0$$

$$5m^2 + 2m - 3 > 0$$

$$m_1 = -1, m_2 = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Stąd } m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$$

Warunek $x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) > -7x_1x_2,$$
$$(x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) > -7x_1x_2.$$

Ze wzorów Viète'a na sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego możemy tę nierówność zapisać w postaci:

$$\left(\frac{-b}{a}\right)\left(\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 3\frac{c}{a}\right) > -7\frac{c}{a}$$
$$-(m+1)\left(\left(-(m+1)\right)^2 - 3(-m^2+1)\right) > -7(-m^2+1)$$
$$-(m+1)^3 + 3(m+1)(-m^2+1) > -7(-m^2+1)$$
$$-(m+1)^3 + 3(m+1)(-m^2+1) + 7(-m^2+1) > 0$$
$$(m+1)\left(-m^2 + 3(-m^2+1) + 7(-m+1)\right) > 0$$
$$(m+1)(-m^2 - 2m - 1 - 3m^2 + 3 + 7 - 7m) > 0$$
$$(m+1)(-4m^2 - 9m + 9) > 0$$
$$m_1 = -3 \text{ lub } m_2 = \frac{3}{4} \text{ lub } m_3 = -1.$$
$$m \in (-\infty, -3) \cup \left(-1, \frac{3}{4}\right).$$

Wyznaczamy część wspólną zbiorów $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$ i $(-\infty, -3) \cup \left(-1, \frac{3}{4}\right)$.

Odpowiedź $m \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$:

$$m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze $\Delta \geq 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu nierówności $x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$.

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

1 punkt zdający otrzymuje za zapisanie nierówności w postaci:

$$(x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) > -7x_1x_2$$

lub równoważnej.

2 punkty zdający otrzymuje za doprowadzenie do nierówności ze zmienną m , np.

$$-(m+1)\left(\left(-(m+1)\right)^2 - 3(-m^2+1)\right) > -7(-m^2+1)$$

3 punkty zdający otrzymuje za wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu

$$-(m+1)\left(\left(-(m+1)\right)^2 - 3(-m^2+1)\right) + 7(-m^2+1),$$

czyli wielomianu $-4m^3 - 13m^2 + 9$: $-3, -1, \frac{3}{4}$

4 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie powyższej nierówności.

$$m \in (-\infty, -3) \cup \left(-1, \frac{3}{4}\right)$$

Trzeci etap polega na wyznaczeniu szukanej wartości parametru m z uwzględnieniem wszystkich warunków.

$$m \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right).$$

Uwagi

1. W przypadku otrzymania na jednym z etapów (I lub II) zbioru pustego lub zbioru R jako zbioru rozwiązań nierówności przyznajemy **0 punktów** za III etap.
2. W przypadku otrzymania w II etapie zbioru rozwiązań, będącego podzbiorem zbioru rozwiązań z I etapu lub otrzymania w I etapie zbioru rozwiązań, będącego podzbiorem zbioru rozwiązań z II etapu, przyznajemy **0 punktów** za III etap.
3. O ile nie zachodzą przypadki z uwag 1. i 2. i zdający poprawnie wykona etap I oraz popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II, albo gdy popełnia błędy w etapie I i otrzyma co najmniej 1 punkt za etap II, to za III etap może otrzymać **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania stosuje nieistniejącą zależność: „suma sześciątów = sześciąt sumy”, prowadzącą do uproszczenia badanego problemu, lub zdający stosuje inny błędny wzór, prowadzący do uproszczenia badanego problemu, ale otrzyma nierówność wielomianową stopnia trzeciego, uzyska trzy miejsca zerowe i poprawnie rozwiązuje otrzymaną nierówność, to za II etap otrzymuje **1 punkt** (za rozwiązanie nierówności).
5. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania otrzyma poprawną nierówność wielomianową stopnia 3. i popełnia błędy rachunkowe w jej rozwiązaniu, to może otrzymać **3 punkty** za II etap, o ile wyznaczy 3 różne miejsca zerowe wielomianu z tej nierówności i konsekwentnie rozwiąże nierówność do końca, zaś w każdym innym przypadku otrzymuje **2 punkty** za ten etap.
6. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania rozważa nierówność wielomianową stopnia większego niż 3. lub niepoprawną nierówność stopnia 3. i wyznacza miejsca zerowe w liczbie właściwej dla stopnia wielomianu i otrzymuje przynajmniej 3 miejsca zerowe, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za II etap, o ile konsekwentnie rozwiąże nierówność. Jeżeli wielomian w tej nierówności nie ma trzech różnych miejsc zerowych, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za ten etap.
7. Jeżeli zdający przy rozwiązywaniu otrzymanej w II etapie nierówności stopnia co najmniej 3. popełnia błąd, polegający na niepoprawnym grupowaniu wyrazów, np. z nierówności $-4m^3 - 13m^2 + 9 > 0$ uzyska $(4m+13)(m^2-9) > 0$, to nie otrzymuje punktów za części II.3 i II.4.

Zadanie 13. (0–4)

III. Modelowanie matematyczne.

5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4).**Przykładowe rozwiązanie**

Niech a_1 będzie pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego, zaś q jego ilorazem.

Z treści zadania otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 q^2 + a_1 q^5 = -84 \\ a_1 q^3 + a_1 q^6 = 168 \\ a_1 q^2 (1 + q^3) = -84 \\ a_1 q^3 (1 + q^3) = 168 \end{cases}$$

Dzieląc stronami te równania, co możemy zrobić, gdyż gdyby którakolwiek z liczb a_1 , q , $1 + q^3$ była równa 0, to otrzymalibyśmy sprzeczność, otrzymujemy

$$q = -2.$$

Zatem

$$\begin{aligned} a_1 (-2)^2 (1 + (-2)^3) &= -84, \\ -28 \cdot a_1 &= -84, \\ a_1 &= 3. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy ciąg geometryczny (a_n) , w którym:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = -2 \end{cases}$$

Wykorzystując wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, doprowadzamy do równania postaci

$$\frac{3((-2)^n - 1)}{-2 - 1} = 32769.$$

Przekształcając to równanie, otrzymujemy $(-2)^n = -32768$. Ponieważ $(-2)^n = (-2)^{15}$, więc $n = 15$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający zapisze

- układ równań z dwiema niewiadomymi, np.: $\begin{cases} a_1 q^2 + a_1 q^5 = -84 \\ a_1 q^3 + a_1 q^6 = 168 \end{cases}$

albo

- układ równań z niewiadomymi q , a_3 , a_6 , np.: $\begin{cases} a_3 + a_6 = -84 \\ q(a_3 + a_6) = 168 \end{cases}$

i na tym zakończy lub dalej popelnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą a_1 lub q

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności 3 p.

Zdający rozwiąże układ równań: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = -2 \end{cases}$.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający wyznaczy szukaną liczbę n : $n = 15$.

Uwagi

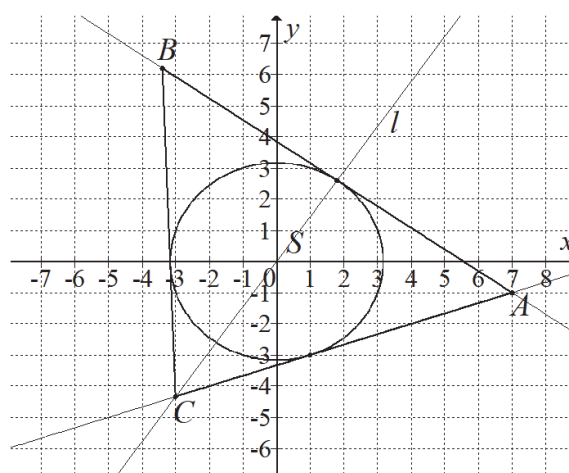
1. Jeżeli zdający przedstawi poprawną strategię poszukiwania liczby n , ale otrzyma błędne wartości a_1 lub q , takie że po podstawieniu do wzoru na S_n otrzymuje równanie, którego rozwiązanie nie jest liczbą naturalną, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**, za realizację rozwiązania do etapu: istotny postęp.
2. Jeżeli zdający zapisze $q = -2$ bez rozwiązania układu lub stosownego uzasadnienia, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający korzysta przy wyznaczaniu n z zapisanej przez siebie zależności " $-(-2)^n = 2^n$ " bez stosownego komentarza, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

Zadanie 14. (0–6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności, wyznacza współrzędne środka odcinka, wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt, oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych, wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu oraz oblicza odległość punktu od prostej (R8.5, 8.5, 8.3, 8.4, R8.6, R8.4).
-----------------------------------	---

Przykładowe rozwiązania

I sposób – analitycznie – styczne AC i AB



Proste AC i AB przechodzą przez punkt $A = (7, -1)$, żadna z nich nie jest prostopadła do osi Ox układu współrzędnych, więc mają równania postaci

$$y = a(x - 7) - 1,$$

$$ax - y - 7a - 1 = 0.$$

Obie te proste są styczne do okręgu, zatem ich odległości od środka okręgu są równe promieniowi okręgu. Stąd otrzymujemy równanie

$$\frac{|-7a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10},$$

$$(-7a - 1)^2 = 10(a^2 + 1),$$

$$49a^2 + 14a + 1 = 10a^2 + 10$$

$$39a^2 + 14a - 9 = 0$$

$$a = \frac{-14 - 40}{78} = -\frac{9}{13} \quad \text{lub} \quad a = \frac{-14 + 40}{78} = \frac{1}{3}.$$

Szukane styczne mają więc równania: $y = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13}$, $y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$. Tylko druga z tych prostych przechodzi przez trzecią ćwiartkę układu współrzędnych, więc prosta AC ma równanie $y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$, a prosta AB ma równanie $y = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13}$.

Trójkąt ABC jest równoramienny, a jego ramionami są boki AC i BC . Zatem wierzchołek C leży na przecięciu prostej AC i symetralnej l boku AB . Prosta l jest prostopadła do prostej AB i przechodzi przez punkt $S = (0, 0)$. Zatem współczynnik kierunkowy prostej l jest równy

$a_l = \frac{13}{9}$. Stąd l ma równanie postaci

$$y = \frac{13}{9}x.$$

Współrzędne wierzchołka C obliczymy, rozwiązując układ równań

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3} \text{ i } y = \frac{13}{9}x.$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{3}x - \frac{10}{3} = \frac{13}{9}x,$$

$$\frac{10}{9}x = -\frac{30}{9}$$

$$x = -3,$$

więc $y = \frac{13}{9} \cdot (-3) = -\frac{13}{3}$, czyli $C = (-3, -\frac{13}{3})$.

Obliczamy współrzędne punktu D styczności prostej AB z danym okręgiem. Jest to punkt przecięcia prostej l z prostą AB . Wystarczy więc rozwiązać układ równań

$$y = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13} \text{ i } y = \frac{13}{9}x.$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$-\frac{9}{13}x + \frac{50}{13} = \frac{13}{9}x,$$

$$\frac{250}{117}x = \frac{50}{13}$$

$$x = \frac{9}{5},$$

więc $y = \frac{13}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{13}{5}$, czyli $D = (\frac{9}{5}, \frac{13}{5})$.

Punkt D jest środkiem odcinka AB , więc

$$D = \left(\frac{7+x_B}{2}, \frac{-1+y_B}{2} \right).$$

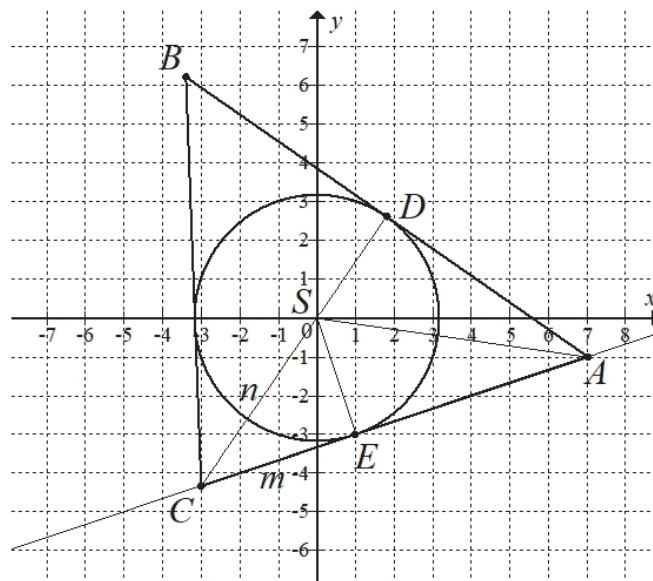
Zatem

$$\frac{7+x_B}{2} = \frac{9}{5} \text{ i } \frac{-1+y_B}{2} = \frac{13}{5},$$

$$x_B = -\frac{17}{5} \text{ i } y_B = \frac{31}{5}.$$

Zatem $B = (-\frac{17}{5}, \frac{31}{5})$.

II sposób – syntetycznie – długości odcinków CE i CS



Promień okręgu jest równy $r = \sqrt{10}$. Długość odcinka SA jest równa

$$|SA| = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ASE otrzymujemy

$$|SA|^2 = |SE|^2 + |EA|^2,$$

$$50 = 10 + EA^2,$$

$$|EA|^2 = 40,$$

$$|EA| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Z twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujemy $|DA| = |EA| = 2\sqrt{10}$.

Trójkąty CES i CDA są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku C . Stąd wynika

$$\frac{|CE|}{|SE|} = \frac{|CD|}{|DA|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|CS|}{|SE|} = \frac{|CA|}{|DA|},$$

$$\frac{m}{\sqrt{10}} = \frac{n + \sqrt{10}}{2\sqrt{10}} \quad \text{oraz} \quad \frac{n}{\sqrt{10}} = \frac{m + 2\sqrt{10}}{2\sqrt{10}},$$

$$2m = n + \sqrt{10} \quad \text{oraz} \quad 2n = m + \sqrt{10},$$

$$n = 2m - \sqrt{10} \quad \text{oraz} \quad 2(2m - \sqrt{10}) = m + \sqrt{10}.$$

Stąd

$$4m - 2\sqrt{10} = m + \sqrt{10},$$

$$m = \frac{4}{3}\sqrt{10}, \quad \text{więc} \quad n = 2 \cdot \frac{4}{3}\sqrt{10} - \sqrt{10} = \frac{5}{3}\sqrt{10}.$$

Uwaga

Długości m i n możemy też obliczyć korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ACD i CSE . Otrzymujemy wtedy

$$|CA|^2 = |CD|^2 + |DA|^2 \quad \text{oraz} \quad |CS|^2 = |CE|^2 + |SE|^2,$$

$$\begin{aligned}
(m+2\sqrt{10})^2 &= (n+\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{10})^2 \text{ oraz } n^2 = m^2 + (\sqrt{10})^2, \\
m^2 + 4m\sqrt{10} + 40 &= n^2 + 2n\sqrt{10} + 10 + 40 \text{ oraz } n^2 = m^2 + 10, \\
4m\sqrt{10} &= 2n\sqrt{10} + 20 \text{ oraz } n^2 = m^2 + 10, \\
2m - \sqrt{10} &= n \text{ oraz } (2m - \sqrt{10})^2 = m^2 + 10, \\
2m - \sqrt{10} &= n \text{ oraz } 4m^2 - 4m\sqrt{10} + 10 = m^2 + 10, \\
2m - \sqrt{10} &= n \text{ oraz } m = \frac{4}{3}\sqrt{10}, \\
n &= \frac{5}{3}\sqrt{10} \text{ oraz } m = \frac{4}{3}\sqrt{10}.
\end{aligned}$$

Zatem długość ramienia AC trójkąta ABC jest równa

$$|AC| = |CE| + |EA| = m + 2\sqrt{10} = \frac{4}{3}\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = \frac{10}{3}\sqrt{10}.$$

Niech $C = (x, y)$. Ponieważ $|AC| = \frac{10}{3}\sqrt{10}$ i $|CS| = \frac{5}{3}\sqrt{10}$, więc

$$\begin{aligned}
|AC|^2 &= \frac{1000}{9} \text{ i } |CS|^2 = \frac{250}{9}, \\
(x-7)^2 + (y+1)^2 &= \frac{1000}{9} \text{ i } x^2 + y^2 = \frac{250}{9}.
\end{aligned}$$

Pierwsze równanie możemy zapisać w postaci

$$x^2 + y^2 - 14x + 2y + 50 = \frac{1000}{9}.$$

Stąd i z drugiego równania otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\frac{250}{9} - 14x + 2y + 50 &= \frac{1000}{9}, \\
7x - y + \frac{50}{3} &= 0, \\
y &= 7x + \frac{150}{9}.
\end{aligned}$$

Stąd i z pierwszego równania mamy

$$\begin{aligned}
x^2 + \left(7x + \frac{50}{3}\right)^2 &= \frac{250}{9}, \\
x^2 + 49x^2 + \frac{700}{3}x + \frac{2500}{9} - \frac{250}{9} &= 0, \\
50x^2 + \frac{700}{3}x + \frac{2250}{9} &= 0, \\
x^2 + \frac{14}{3}x + 5 &= 0, \\
3x^2 + 14x + 15 &= 0, \\
3x^2 + 9x + 5x + 15 &= 0, \\
3x(x+3) + 5(x+3) &= 0, \\
(x+3)(3x+5) &= 0, \\
x = -3 \text{ lub } x = -\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Gdy $x = -3$, to $y = 7 \cdot (-3) + \frac{50}{3} = -\frac{13}{3}$, a gdy $x = -\frac{5}{3}$, to $y = 7 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{50}{3} = 5$.

Ponieważ obie współrzędne punktu C są ujemne, więc $C = \left(-3, -\frac{13}{3}\right)$.

Niech $B = (x, y)$. Ponieważ $|BC| = |AC| = \frac{10}{3}\sqrt{10}$ i $|AB| = 2 \cdot 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$, więc

$$|BC|^2 = \frac{1000}{9} \text{ i } |AB|^2 = 160,$$

$$(-3-x)^2 + \left(-\frac{13}{3}-y\right)^2 = \frac{1000}{9} \text{ i } (x-7)^2 + (y+1)^2 = 160,$$

$$x^2 + y^2 + 6x + \frac{26}{3}y - \frac{250}{3} = 0 \text{ i } x^2 + y^2 - 14x + 2y - 110 = 0.$$

Stąd

$$x + \frac{1}{3}y + \frac{4}{3} = 0 \text{ i } x^2 + y^2 - 14x + 2y - 110 = 0,$$

$$y = -3x - 4 \text{ i } x^2 + (-3x - 4)^2 - 14x + 2(-3x - 4) - 110 = 0.$$

Drugie równanie możemy zapisać w postaci

$$10x^2 + 4x - 102 = 0,$$

$$5x^2 + 2x - 51 = 0,$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-51) = 1024, \sqrt{\Delta} = 32,$$

$$x = \frac{-2-32}{10} = -\frac{17}{5} \text{ lub } x = \frac{-2+32}{10} = 3,$$

Gdy $x = -\frac{17}{5}$, to $y = -3 \cdot \left(-\frac{17}{5}\right) - 4 = \frac{31}{5}$, a gdy $x = 3$, to $y = -3 \cdot 3 - 4 = -13$.

Ponieważ punkt B nie leży w czwartej ćwiartce układu współrzędnych, więc $B = \left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right)$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający:

- a) obliczy długości odcinków stycznych poprowadzonych z punktu A :

$$|AD| = |AE| = 2\sqrt{10}$$

albo

- b) obliczy współrzędne środka M odcinka AS oraz długość odcinka AS ,

$$\text{gdzie } S = (0, 0): M = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right), |AS| = 5\sqrt{2},$$

albo

- c) obliczy sinus kąta SAE : $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

albo

- d) zapisze równanie pęku prostych przechodzących przez punkt A : $y = ax - 7a - 1$,

albo

- e) zapisze, że trójkąt ADC jest podobny do trójkąta SEC ,

- f) obliczy długość tylko jednego z odcinków AD lub AE : $|AD| = |AE| = 2\sqrt{10}$ oraz zapisze tę długość w zależności od współrzędnych punktu D (lub E) lub obliczy tangens kąta SAE lub SAD : $\text{tg} \alpha = \frac{1}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym istotny postęp 2 p.

Zdający:

A) obliczy $|AD| = 2\sqrt{10}$ oraz zapisze układ równań
$$\begin{cases} (x-7)^2 + (y+1)^2 = 40 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

albo

B) obliczy $|AD| = |AE| = 2\sqrt{10}$ oraz zapisze układ równań z niewiadomymi $m = |CE|$ i $n = |CS|$:

- $\frac{m}{\sqrt{10}} = \frac{n+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}$ i $\frac{n}{\sqrt{10}} = \frac{m+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}$
- $(m+2\sqrt{10})^2 = (n+\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{10})^2$ i $n^2 = m^2 + (\sqrt{10})^2$

albo

C) obliczy $|AD| = 2\sqrt{10}$, obliczy tangens kąta SAE : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ oraz obliczy współczynnik kierunkowy prostej AS ($a_{AS} = -\frac{1}{7}$)

albo

D) obliczy współrzędne środka $M = (\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})$, długość odcinka $|AS| = 5\sqrt{2}$ oraz zapisze

układ równań
$$\begin{cases} (x-\frac{7}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2} \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

albo

E) obliczy sinus kąta SAE : $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, tangens tego kąta: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ oraz współczynnik kierunkowy prostej AS ($a_{AS} = -\frac{1}{7}$)

albo

F) zapisze równanie pęku prostych przechodzących przez punkt A : $y = ax - 7a - 1$ oraz

równanie z niewiadomą a : $\frac{|-7a-1|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{10}$

albo

G) zapisze równanie pęku prostych przechodzących przez punkt A : $y = ax - 7a - 1$ oraz układu równań $x^2 + y^2 = 10$ i $y = ax - 7a - 1$ wraz z warunkiem istnienia jednego rozwiązania tego układu

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający:

I obliczy współrzędne punktów styczności D i E : $D = (\frac{9}{5}, \frac{13}{5})$, $E = (1, -3)$

albo

II zapisze równania prostych AC i AB : $y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$, $y = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13}$

albo

III obliczy długości odcinków CE i CS : $m = |CE| = \frac{4}{3}\sqrt{10}$, $n = |CS| = \frac{4}{3}\sqrt{10}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Zdający

- obliczy współrzędne wierzchołka B : $B = \left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right)$

albo

- obliczy współrzędne wierzchołka C : $C = \left(-3, -\frac{13}{3}\right)$

Uwaga

Jeżeli zdający

- obliczy współrzędne wierzchołka B : $B = \left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right)$ oraz zapisze układ równań z niewiadomymi x, y – współrzędnymi wierzchołka C , np.: $x - 3y - 10 = 0$ i $13x - 9y = 0$

albo

- obliczy współrzędne wierzchołka C : $C = \left(-3, -\frac{13}{3}\right)$ oraz zapisze układ równań z niewiadomymi x, y – współrzędnymi wierzchołka B , np.: $\frac{x+7}{2} = \frac{9}{5}$ i $\frac{y-1}{2} = \frac{13}{5}$

albo

- obliczy współrzędne obu wierzchołków B i C , popełniając w trakcie rozwiązania błędy rachunkowe

to otrzymuje **5 punktów**.

Rozwiązanie pełne 6 p.

Zdający obliczy współrzędne wierzchołków B i C : $B = \left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right)$, $C = \left(-3, -\frac{13}{3}\right)$.

Uwagi

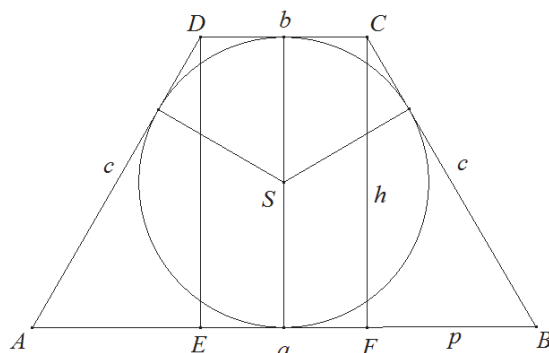
1. Jeżeli zdający pominie informację o ujemnych współrzędnych punktu C i tym samym zamieni miejscami proste AC i AB , to może otrzymać **5 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie popełni innych błędów.
2. Jeżeli zdający błędnie przyjmuje, że podstawą trójkąta jest inny bok niż AB , to może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.
3. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **5 punktów**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozwiązania zadania na żadnym etapie.
4. Jeżeli zdający zapisze dwa równania z dwiema niewiadomymi, którymi są współrzędne punktu B lub C , to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający odczytuje z rysunku współrzędne punktu E , a następnie wyznacza równanie stycznej AE i na tym poprzestaje, to może otrzymać **1 punkt**.

Zadanie 15. (0–7)

III. Modelowanie matematyczne.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. (R7.5). 11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).
--------------------------------	---

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wyznamy dziedzinę funkcji L . Z warunków zadania wynika, że $a > h$, więc $a > 2 - a$. Stąd $a > 1$. Jeśli $a = 1$, to czworokąt jest kwadratem. Ponadto $a < 2$. Jeśli $a = 2$, to $h = 0$ i zamiast trapezu mamy do czynienia z odcinkiem o długości 2.

Rozważany trapez istnieje jedynie dla $a \in (1, 2)$.

Z warunków zadania otrzymujemy

$$a + h = 2, \text{ skąd } h = 2 - a.$$

Ponieważ w trapez można wpisać okrąg, więc

$$a + b = 2c.$$

Obwód L trapezu jest więc równy

$$L = a + b + 2c = 2(a + b).$$

Trapez jest równoramienny, więc odcinki AE i FB mają tę samą długość równą

$$p = \frac{a - b}{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCF otrzymujemy

$$p^2 + h^2 = c^2,$$

$$\left(\frac{a - b}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2,$$

$$\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4} + h^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4},$$

$$h^2 = ab,$$

$$(2 - a)^2 = ab,$$

$$b = \frac{(2-a)^2}{a} = \frac{a^2 - 4a + 4}{a}.$$

Zatem

$$L = a + b + 2c = 2(a + b) = 2\left(a + \frac{a^2 - 4a + 4}{a}\right) = 2 \cdot \frac{2a^2 - 4a + 4}{a},$$

czyli

$$L(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a} \text{ dla } a \in (1, 2).$$

Pochodna funkcji L jest równa

$$L'(a) = \frac{(8a - 8) \cdot a - (4a^2 - 8a + 8) \cdot 1}{a^2} = \frac{4a^2 - 8}{a^2} = \frac{4(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})}{a^2} \text{ dla } a \in (1, 2).$$

Ponieważ dla każdego $a \in (1, 2)$ prawdziwa jest nierówność $\frac{4(a + \sqrt{2})}{a^2} > 0$, więc

$$L'(a) = 0 \Leftrightarrow a - \sqrt{2} = 0 \wedge a \in (1, 2) \Leftrightarrow a = \sqrt{2},$$

$$L'(a) > 0 \Leftrightarrow a - \sqrt{2} > 0 \wedge a \in (1, 2) \Leftrightarrow a \in (\sqrt{2}, 2),$$

$$L'(a) < 0 \Leftrightarrow a - \sqrt{2} < 0 \wedge a \in (1, 2) \Leftrightarrow a \in (1, \sqrt{2}).$$

Oznacza to, że w przedziale $(1, \sqrt{2})$ funkcja L jest malejąca, w przedziale $(\sqrt{2}, 2)$ jest rosnąca, a w punkcie $a = \sqrt{2}$ osiąga minimum lokalne, które jest zarazem jej najmniejszą wartością.

Tangens kąta ostrego trapezu o najmniejszym obwodzie jest równy

$$\operatorname{tg} \sphericalangle ABC = \frac{h}{p} = \frac{2-a}{\frac{a-b}{2}} = \frac{2(2-a)}{a - \frac{a^2-4a+4}{a}} = \frac{a(a-2)}{2(1-a)},$$

więc dla $a = \sqrt{2}$ wartość tangensa jest równa

$$\operatorname{tg} \sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-2)}{2(1-\sqrt{2})} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}} = 1,$$

co oznacza, że $\sphericalangle ABC = 45^\circ$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów. Ocenianie II etapu jest niezależne od wyniku uzyskanego za I etap.

I. Pierwszy etap, który oceniamy na **3 punkty**, składa się z trzech części:

I.1) wyznaczenie wszystkich wartości a , dla których istnieje trapez o podanych własnościach, czyli dziedziny funkcji L : $D_L = (1, 2)$

(Za wyznaczenie dziedziny uznaje się też zapisanie dwóch nierówności: $2 - a > 0$, $a > 2 - a$).

I.2) zapisanie poprawnej zależności między wielkościami a i b , np.:

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + (2-a)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ lub } b = \frac{a^2 - 4a + 4}{a}$$

I.3) wykazanie, że obwód L trapezu, jako funkcja zmiennej a , wyraża się wzorem:

$$L(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$$

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

II. Drugi etap (**3 punkty**) składa się z trzech części:

II.1) wyznaczenie pochodnej funkcji $f(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$:

$$f'(a) = \frac{(8a - 8) \cdot a - (4a^2 - 8a + 8) \cdot 1}{a^2} \quad \text{lub} \quad f'(a) = \frac{4a^2 - 8}{a^2}$$

II.2) obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji f : $a = -\sqrt{2}$ lub $a = \sqrt{2}$

II.3) uzasadnienie (np. badanie monotoniczności funkcji), że funkcja L posiada wartość najmniejszą dla $a = \sqrt{2}$.

III. Trzeci etap (**1 punkt**) – obliczenie tangensa kąta ostrego trapezu o najmniejszym polu:
 $\text{tg} \sphericalangle ABC = 1$.

Uwagi

1. Za poprawne uzasadnienie, że funkcja L posiada wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości a , przy której pochodna się zeruje można uznać sytuacje, gdy zdający:

- opisuje, słownie lub graficznie (np. przy użyciu strzałek), monotoniczność funkcji L ;
- zapisuje, że dla wyznaczonej wartości a funkcja L ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość.

Jeżeli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

2. Jeżeli zdający przyjmuje, że dziedziną funkcji L jest przedział $(0, +\infty)$ lub nie wyznaczy tej dziedziny, to **nie otrzymuje punktów** za realizację części II.3.

3. Jeżeli zdający przyjmuje, że dziedziną funkcji L jest przedział $(0, 2)$ lub zapisze warunki: $2 - a > 0$ i $a > 0$, to może otrzymać **1 punkt** za realizację części II.3., o ile uzasadni istnienie najmniejszej wartości funkcji.

4. Jeżeli zdający przyjmuje, że dziedziną funkcji L jest przedział $(1, +\infty)$ lub zapisze warunki: $a > h$ i $h > 0$, lub zapisze warunek $a > 2 - a$, to może otrzymać **1 punkt** za realizację części II.3., o ile uzasadni istnienie najmniejszej wartości funkcji.

5. Jeżeli zdający przyjmuje, że dziedziną funkcji L jest przedział $\langle 1, 2 \rangle$, to za realizację etapu I.1 otrzymuje **1 punkt**.

6. Jeżeli zdający w wyniku błędów nie wyznaczy poprawnie długości dłuższej podstawy trapezu o najmniejszym obwodzie, ale dla wyznaczonej wartości a obliczy tangens kąta ostrego trapezu, to może otrzymać **1 punkt** za III etap.

7. Jeżeli zdający bada inną funkcję zmiennej a niż postaci $g(a) = k \cdot \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$, gdzie $k \neq 0$, to nie otrzymuje punktów za II i III etap rozwiązania.

8. Jeżeli z zapisu rozwiązania wynika, że zdający stosuje poprawny wzór na pochodną ilorazu funkcji i dalej popełnia błędy, ale otrzymana w rozwiązaniu pochodna ma dwa różne miejsca zerowe, to zdający może otrzymać w II etapie punkty za konsekwentną realizację części II.2)

i II.3). Jeżeli z zapisu rozwiązania nie wynika, że zdający stosuje poprawny wzór na pochodną ilorazu funkcji i zdający popełnia błędy przy obliczaniu pochodnej, ale otrzymuje wzór na pochodną, w którym w liczniku jest wielomian stopnia 2, a w mianowniku a^2 , to może w II etapie otrzymać jedynie punkt za konsekwentną realizację części II.3.