

UZUPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD	PESEL
<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>

*miejsce
na naklejkę*

**EGZAMIN MATURALNY
Z MATEMATYKI**

POZIOM PODSTAWOWY

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 26 stron (zadania 1–34). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–25) zaznacz na karcie odpowiedzi, w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz właściwe.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (26–34) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.
9. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
10. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.



**UZUPEŁNIA ZESPÓŁ
NADZORUJĄCY**

Uprawnienia zdającego do:

- dostosowania kryteriów oceniania
- nieprzenoszenia zaznacheń na kartę
- dostosowania w zw. z dyskalkulią

7 MAJA 2019

**Godzina rozpoczęcia:
9:00**

**Czas pracy:
170 minut**

**Liczba punktów
do uzyskania: 50**

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W każdym z zadań od 1. do 25. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)

Liczba $\log_{\sqrt{2}} 2$ jest równa

- A. 2 B. 4 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Zadanie 2. (1 pkt)

Liczba naturalna $n = 2^{14} \cdot 5^{15}$ w zapisie dziesiętnym ma

- A. 14 cyfr B. 15 cyfr C. 16 cyfr D. 30 cyfr

Zadanie 3. (1 pkt)

W pewnym banku prowizja od udzielanych kredytów hipotecznych przez cały styczeń była równa 4%. Na początku lutego ten bank obniżył wysokość prowizji od wszystkich kredytów o 1 punkt procentowy. Oznacza to, że prowizja od kredytów hipotecznych w tym banku zmniejszyła się o

- A. 1% B. 25% C. 33% D. 75%

Zadanie 4. (1 pkt)

Równość $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{a} = 1$ jest prawdziwa dla

- A. $a = \frac{11}{20}$ B. $a = \frac{8}{9}$ C. $a = \frac{9}{8}$ D. $a = \frac{20}{11}$

Zadanie 5. (1 pkt)

Para liczb $x = 2$ i $y = 2$ jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} ax + y = 4 \\ -2x + 3y = 2a \end{cases}$ dla

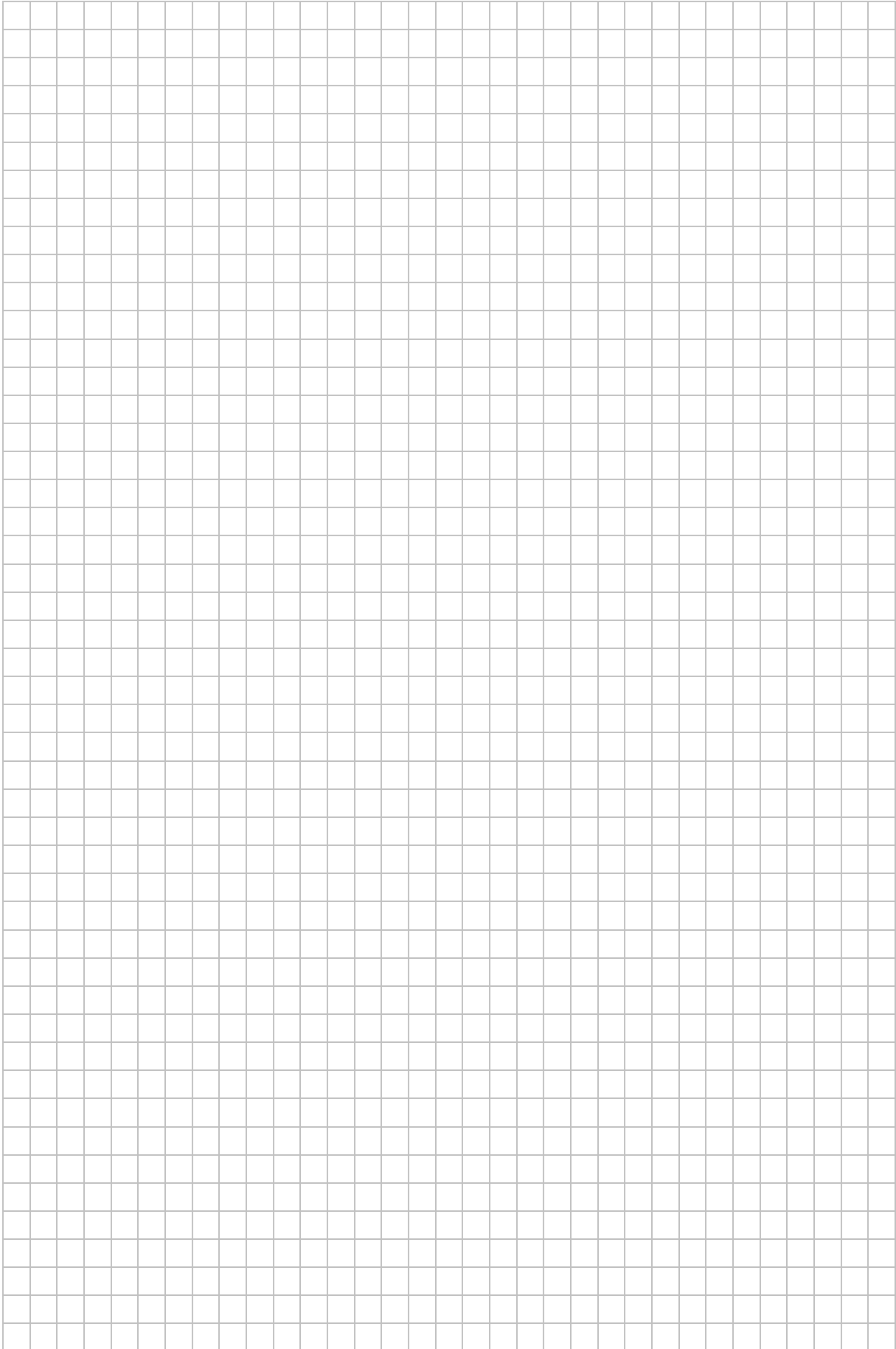
- A. $a = -1$ B. $a = 1$ C. $a = -2$ D. $a = 2$

Zadanie 6. (1 pkt)

Równanie $\frac{(x-1)(x+2)}{x-3} = 0$

- A. ma trzy różne rozwiązania: $x = 1, x = 3, x = -2$.
B. ma trzy różne rozwiązania: $x = -1, x = -3, x = 2$.
C. ma dwa różne rozwiązania: $x = 1, x = -2$.
D. ma dwa różne rozwiązania: $x = -1, x = 2$.

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)



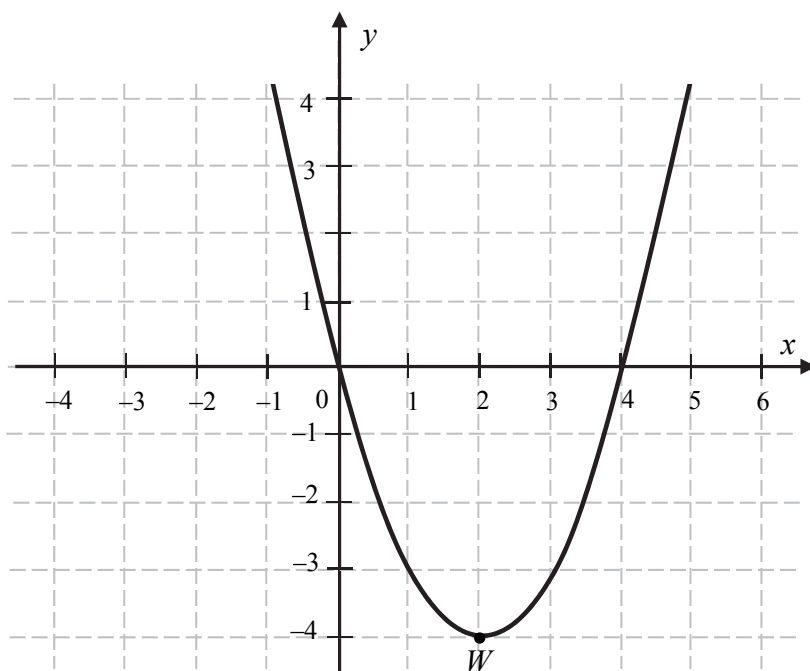
Zadanie 7. (1 pkt)

Miejszem zerowym funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = 3(x+1) - 6\sqrt{3}$ jest liczba

- A. $3 - 6\sqrt{3}$ B. $1 - 6\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3} - 1$ D. $2\sqrt{3} - \frac{1}{3}$

Informacja do zadań 8.–10.

Na rysunku przedstawiony jest fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (2, -4)$. Liczby 0 i 4 to miejsca zerowe funkcji f .



Zadanie 8. (1 pkt)

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

- A. $(-\infty, 0)$ B. $\langle 0, 4 \rangle$ C. $\langle -4, +\infty \rangle$ D. $\langle 4, +\infty \rangle$

Zadanie 9. (1 pkt)

Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 1, 4 \rangle$ jest równa

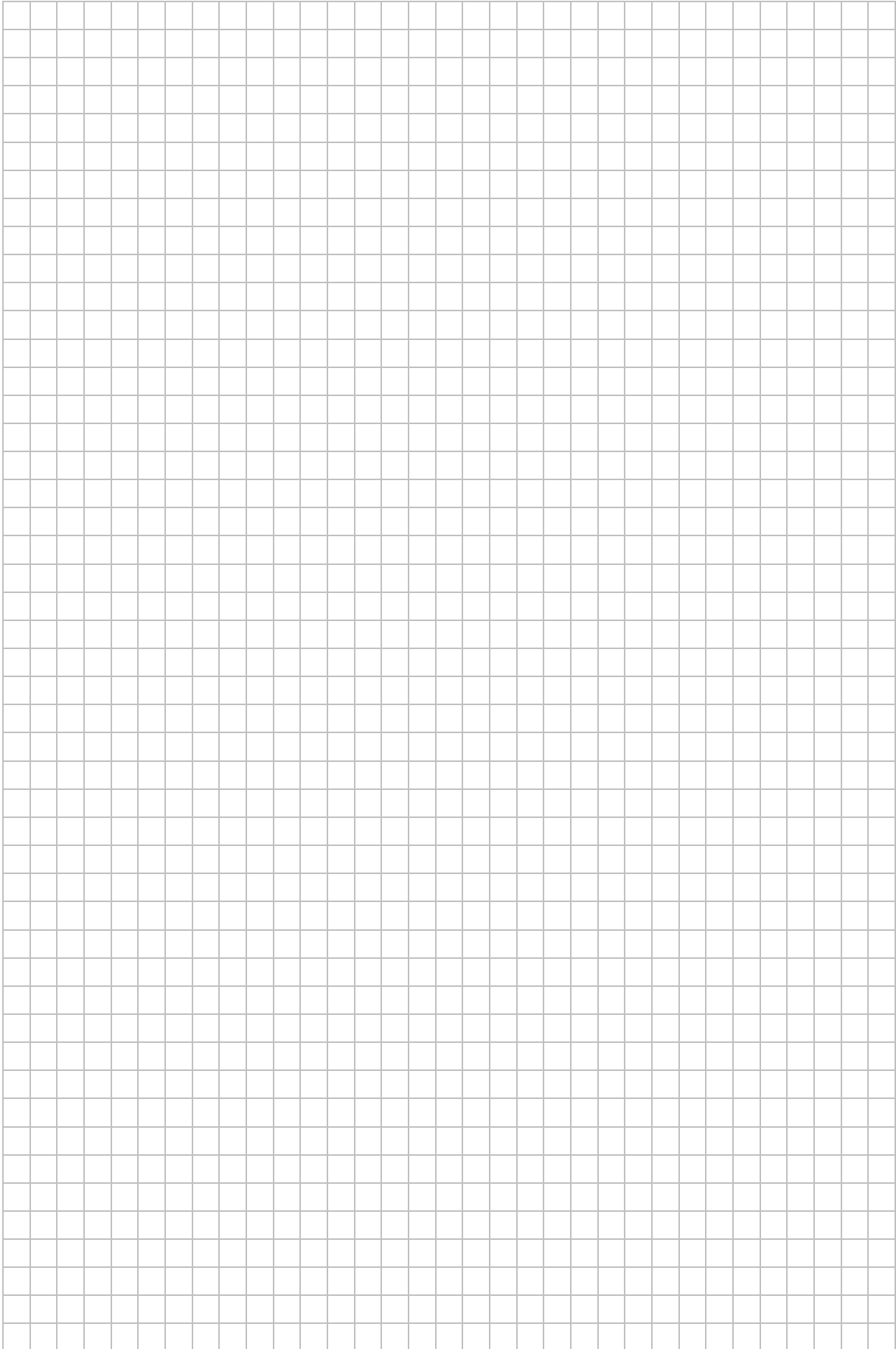
- A. -3 B. -4 C. 4 D. 0

Zadanie 10. (1 pkt)

Ośią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu

- A. $y = -4$ B. $x = -4$ C. $y = 2$ D. $x = 2$

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)



Zadanie 11. (1 pkt)

W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, dane są dwa wyrazy: $a_1 = 7$ i $a_8 = -49$. Suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

- A. -168 B. -189 C. -21 D. -42

Zadanie 12. (1 pkt)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , określony dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie i spełniony jest warunek $\frac{a_5}{a_3} = \frac{1}{9}$. Iloraz tego ciągu jest równy

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C. 3 D. $\sqrt{3}$

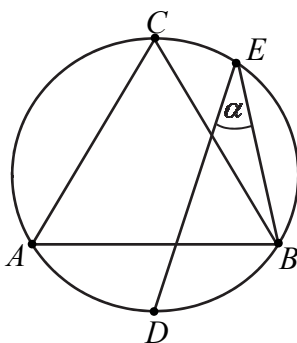
Zadanie 13. (1 pkt)

Sinus kąta ostrego α jest równy $\frac{4}{5}$. Wtedy

- A. $\cos \alpha = \frac{5}{4}$ B. $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ C. $\cos \alpha = \frac{9}{25}$ D. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

Zadanie 14. (1 pkt)

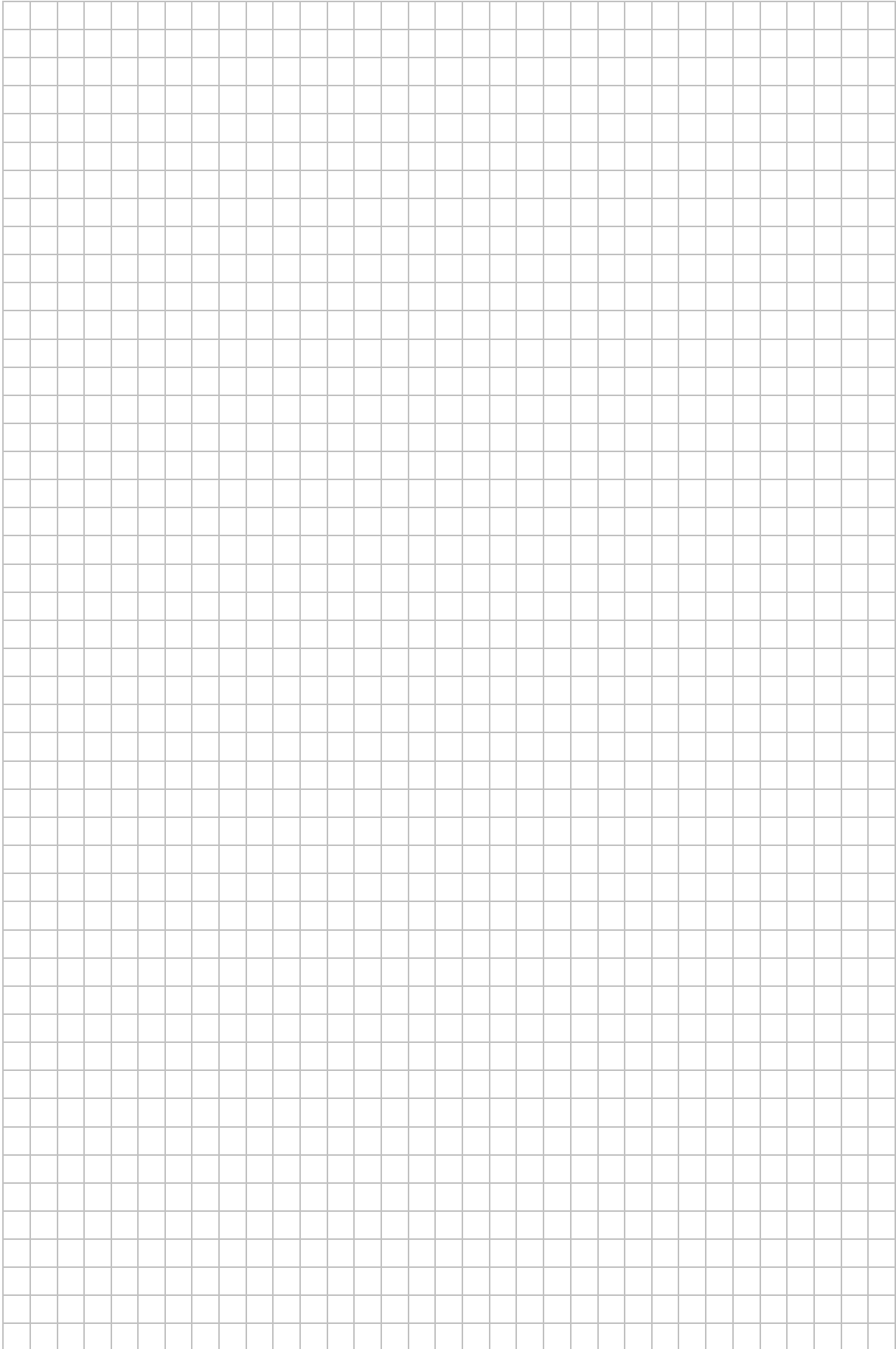
Punkty D i E leżą na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym ABC (zobacz rysunek). Odcinek CD jest średnicą tego okręgu. Kąt wpisany DEB ma miarę α .



Zatem

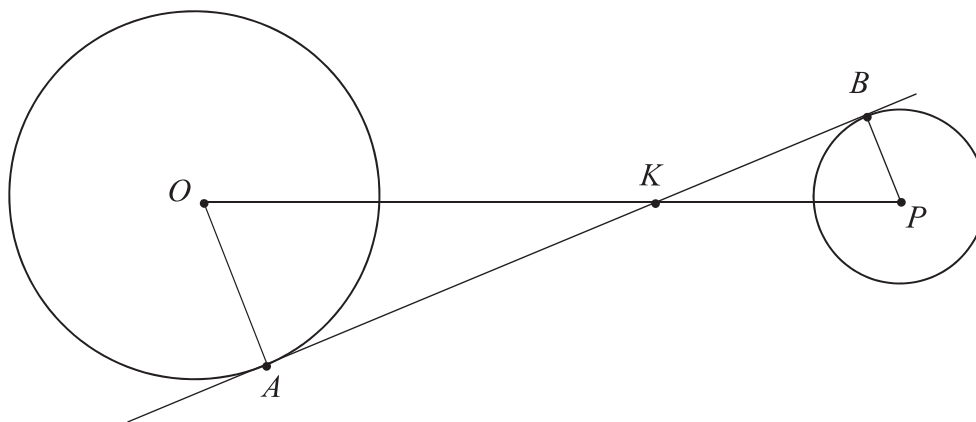
- A. $\alpha = 30^\circ$ B. $\alpha < 30^\circ$ C. $\alpha > 45^\circ$ D. $\alpha = 45^\circ$

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)



Zadanie 15. (1 pkt)

Dane są dwa okręgi: okrąg o środku w punkcie O i promieniu 5 oraz okrąg o środku w punkcie P i promieniu 3. Odcinek OP ma długość 16. Prosta AB jest styczna do tych okręgów w punktach A i B . Ponadto prosta AB przecina odcinek OP w punkcie K (zobacz rysunek).



Wtedy

- A. $|OK|=6$ B. $|OK|=8$ C. $|OK|=10$ D. $|OK|=12$

Zadanie 16. (1 pkt)

Dany jest romb o boku długości 4 i kącie rozwartym 150° . Pole tego rombu jest równe

- A. 8 B. 12 C. $8\sqrt{3}$ D. 16

Zadanie 17. (1 pkt)

Proste o równaniach $y = (2m + 2)x - 2019$ oraz $y = (3m - 3)x + 2019$ są równoległe, gdy

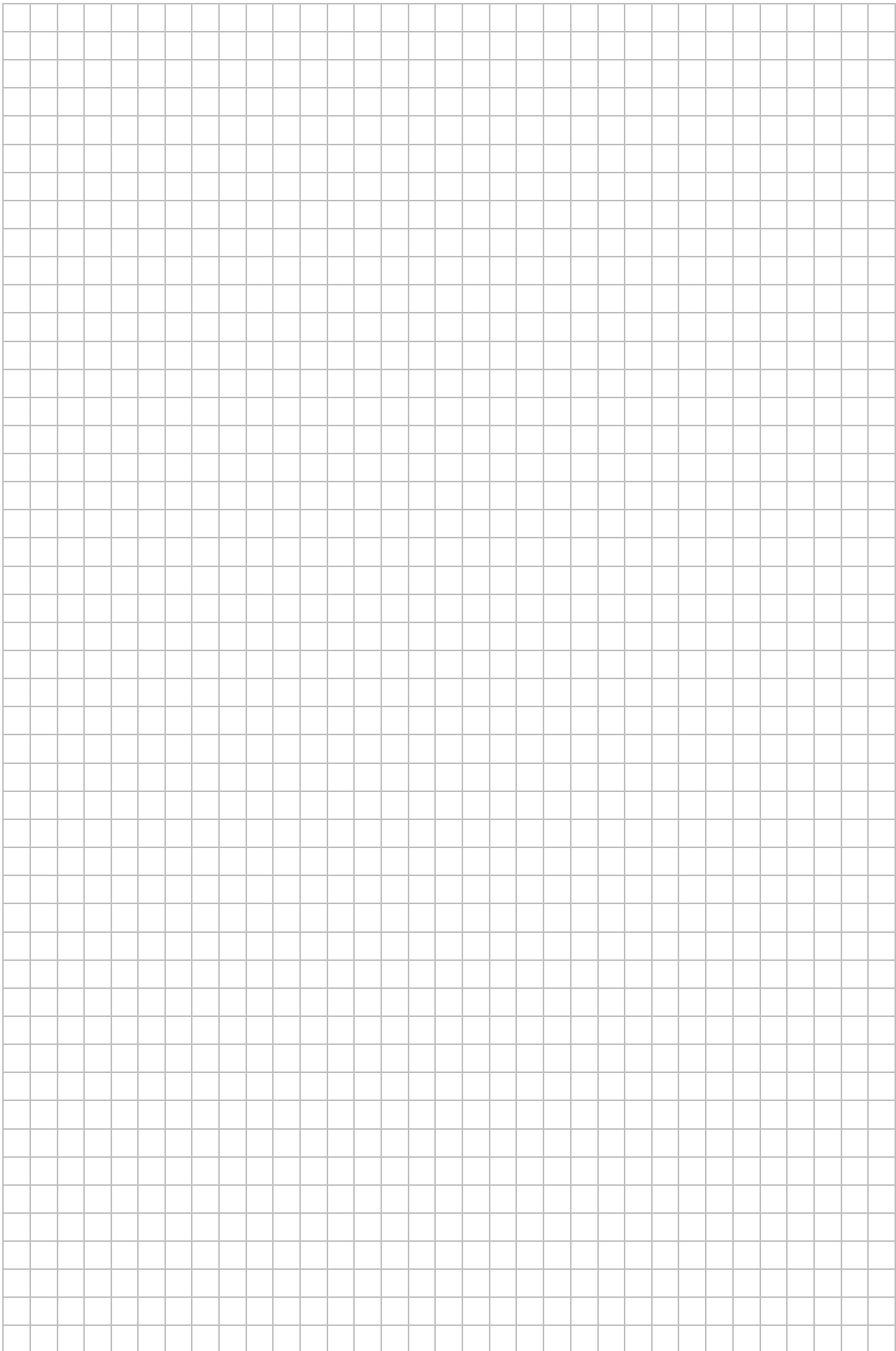
- A. $m = -1$ B. $m = 0$ C. $m = 1$ D. $m = 5$

Zadanie 18. (1 pkt)

Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -4x + 1$ i przechodzi przez punkt $P = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, gdy

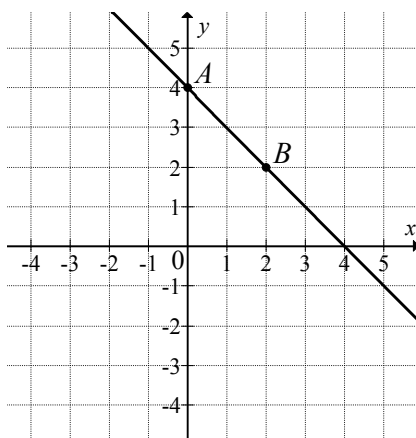
- A. $a = -4$ i $b = -2$ B. $a = \frac{1}{4}$ i $b = -\frac{1}{8}$
C. $a = -4$ i $b = 2$ D. $a = \frac{1}{4}$ i $b = \frac{1}{2}$

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)



Zadanie 19. (1 pkt)

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji liniowej f . Na wykresie tej funkcji leżą punkty $A = (0, 4)$ i $B = (2, 2)$.



Obrazem prostej AB w symetrii względem początku układu współrzędnych jest wykres funkcji g określonej wzorem

- A. $g(x) = x + 4$ B. $g(x) = x - 4$ C. $g(x) = -x - 4$ D. $g(x) = -x + 4$

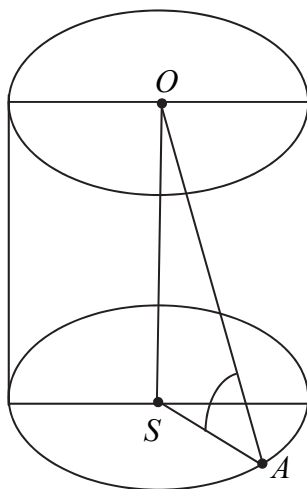
Zadanie 20. (1 pkt)

Dane są punkty o współrzędnych $A = (-2, 5)$ oraz $B = (4, -1)$. Średnica okręgu wpisanego w kwadrat o boku AB jest równa

- A. 12 B. 6 C. $6\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{6}$

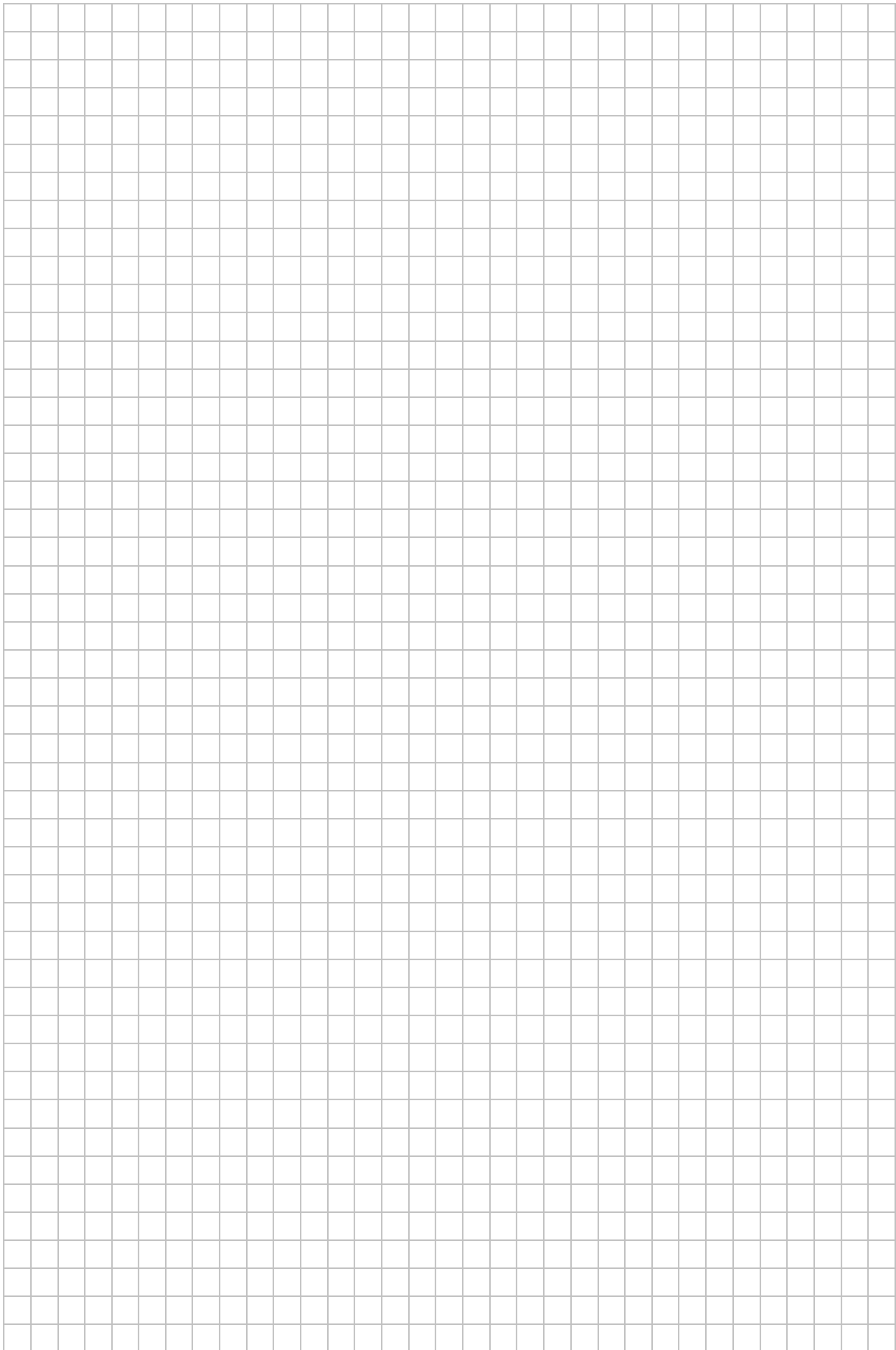
Zadanie 21. (1 pkt)

Promień AS podstawy walca jest równy połowie wysokości OS tego walca. Sinus kąta OAS (zobacz rysunek) jest równy



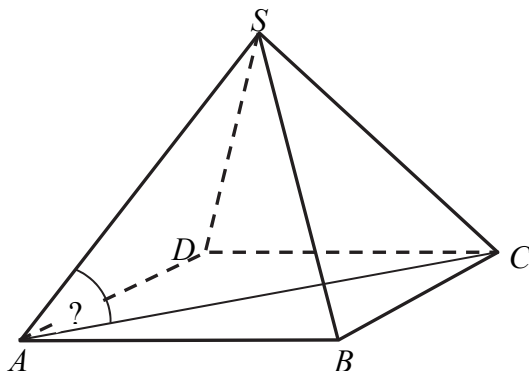
- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Zadanie 22. (1 pkt)

Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCD S$ jest kwadrat $ABCD$. Wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi.



Miara kąta SAC jest równa

- A. 90° B. 75° C. 60° D. 45°

Zadanie 23. (1 pkt)

Mediana zestawu sześciu danych liczb: 4, 8, 21, a , 16, 25, jest równa 14. Zatem

- A. $a = 7$ B. $a = 12$ C. $a = 14$ D. $a = 20$

Zadanie 24. (1 pkt)

Wszystkich liczb pięciocyfrowych, w których występują wyłącznie cyfry 0, 2, 5, jest

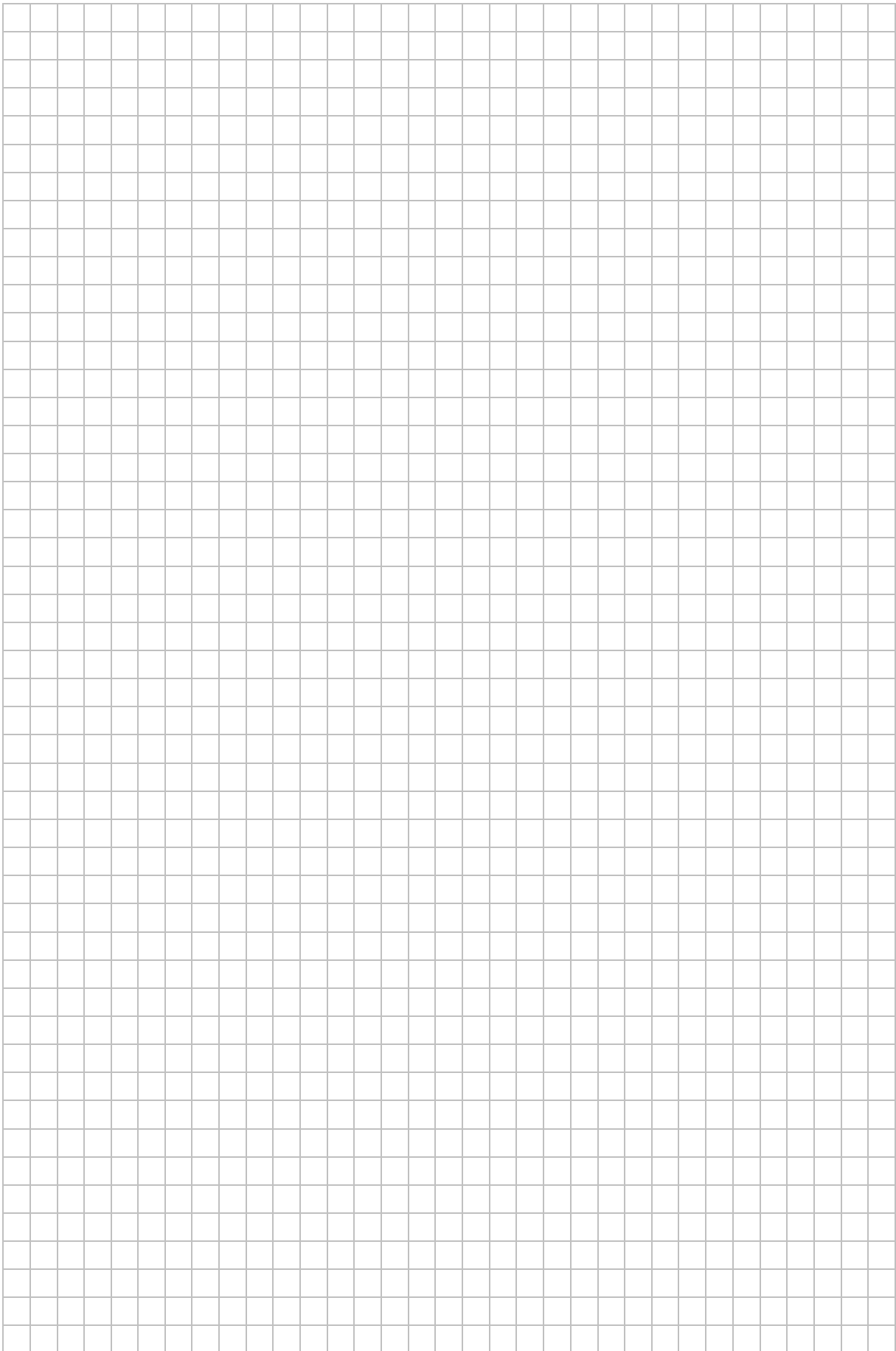
- A. 12 B. 36 C. 162 D. 243

Zadanie 25. (1 pkt)

W pudełku jest 40 kul. Wśród nich jest 35 kul białych, a pozostałe to kule czerwone. Prawdopodobieństwo wylosowania każdej kuli jest takie samo. Z pudełka losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy kulę czerwoną, jest równe

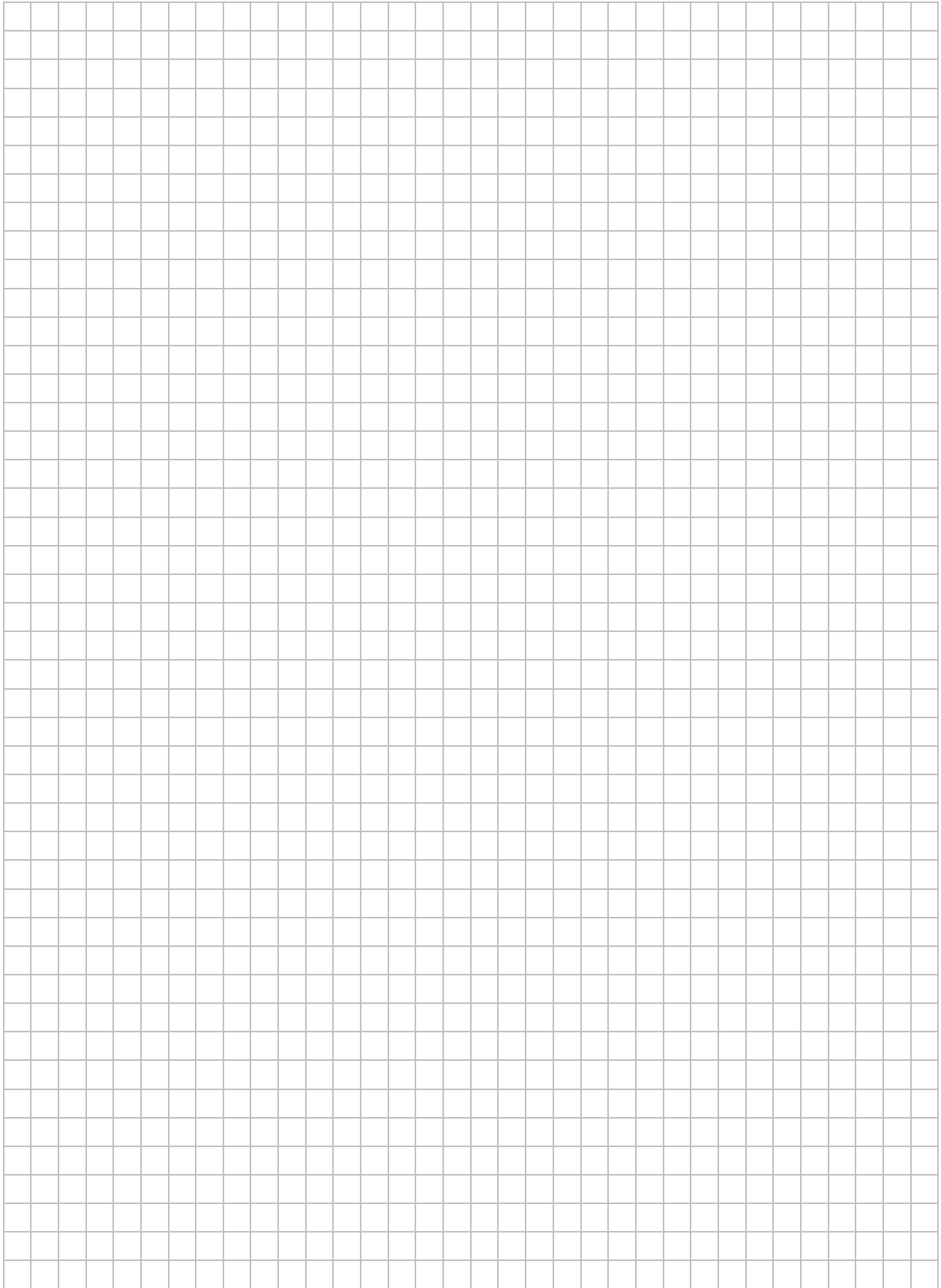
- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{40}$ D. $\frac{1}{35}$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Zadanie 26. (2 pkt)

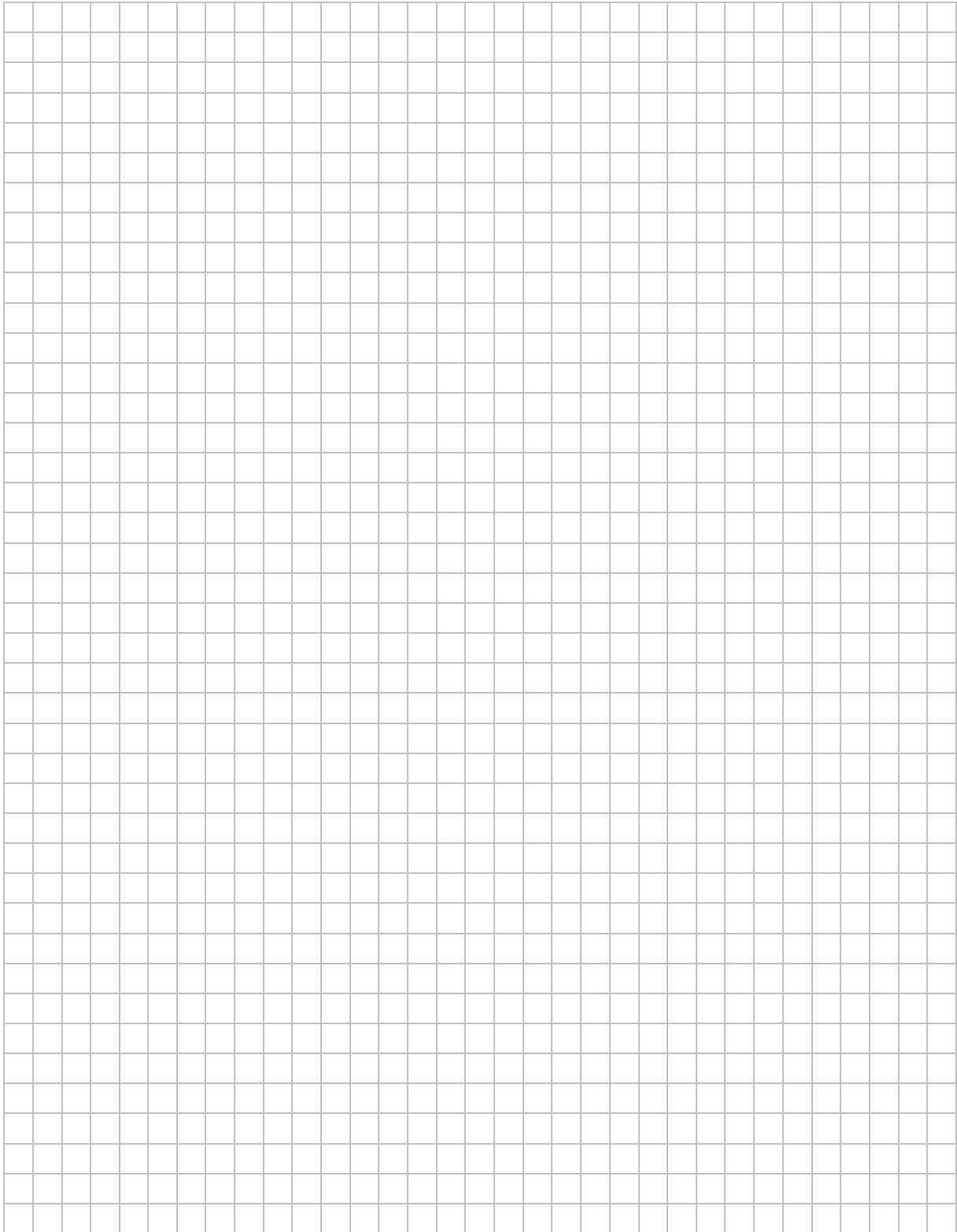
Rozwiąż równanie $x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = 0$.



Odpowiedź:

Zadanie 27. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 16x + 16 > 0$.



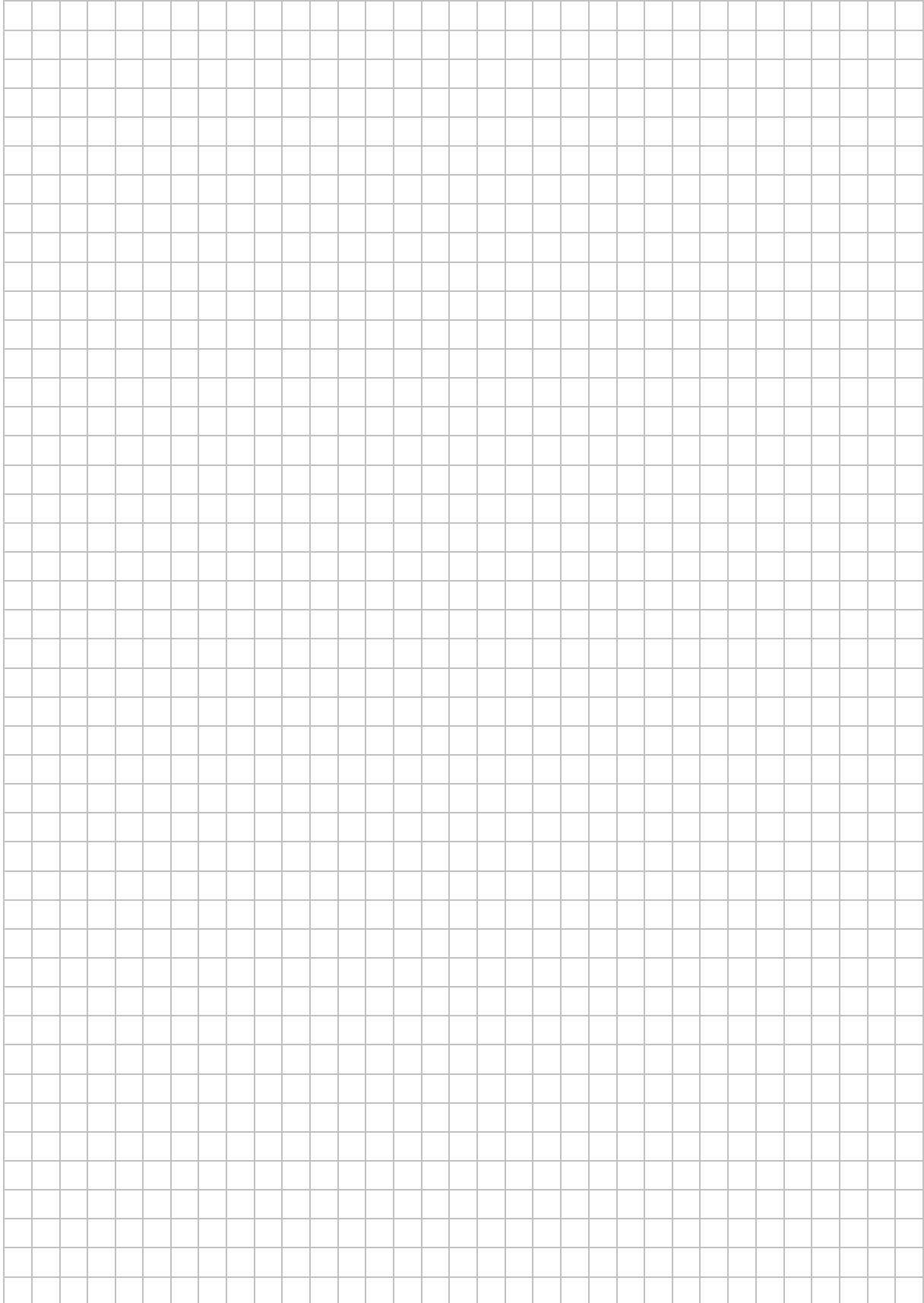
Odpowiedź:

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	26.	27.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 28. (2 pkt)

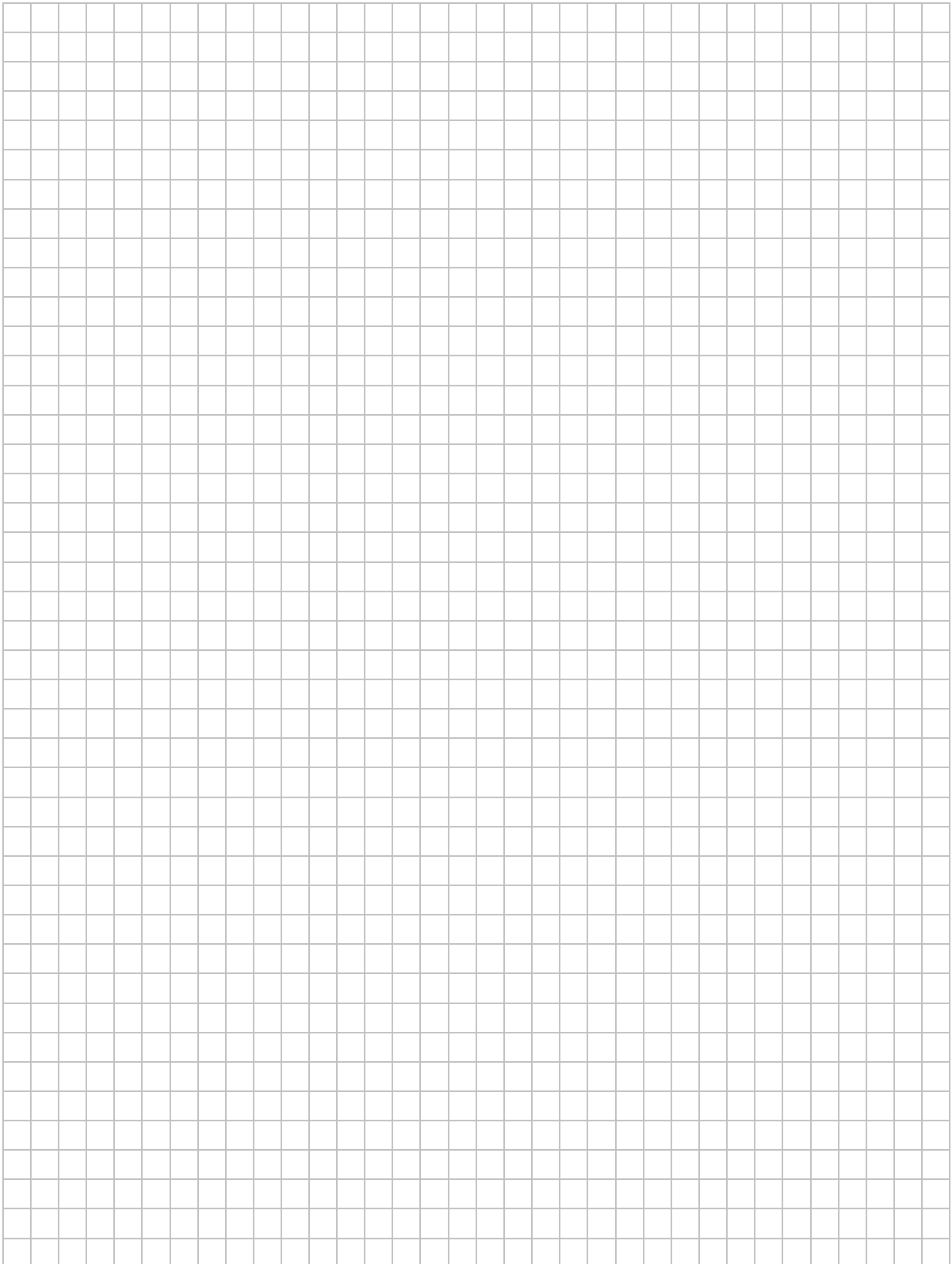
Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0.$$



Zadanie 30. (2 pkt)

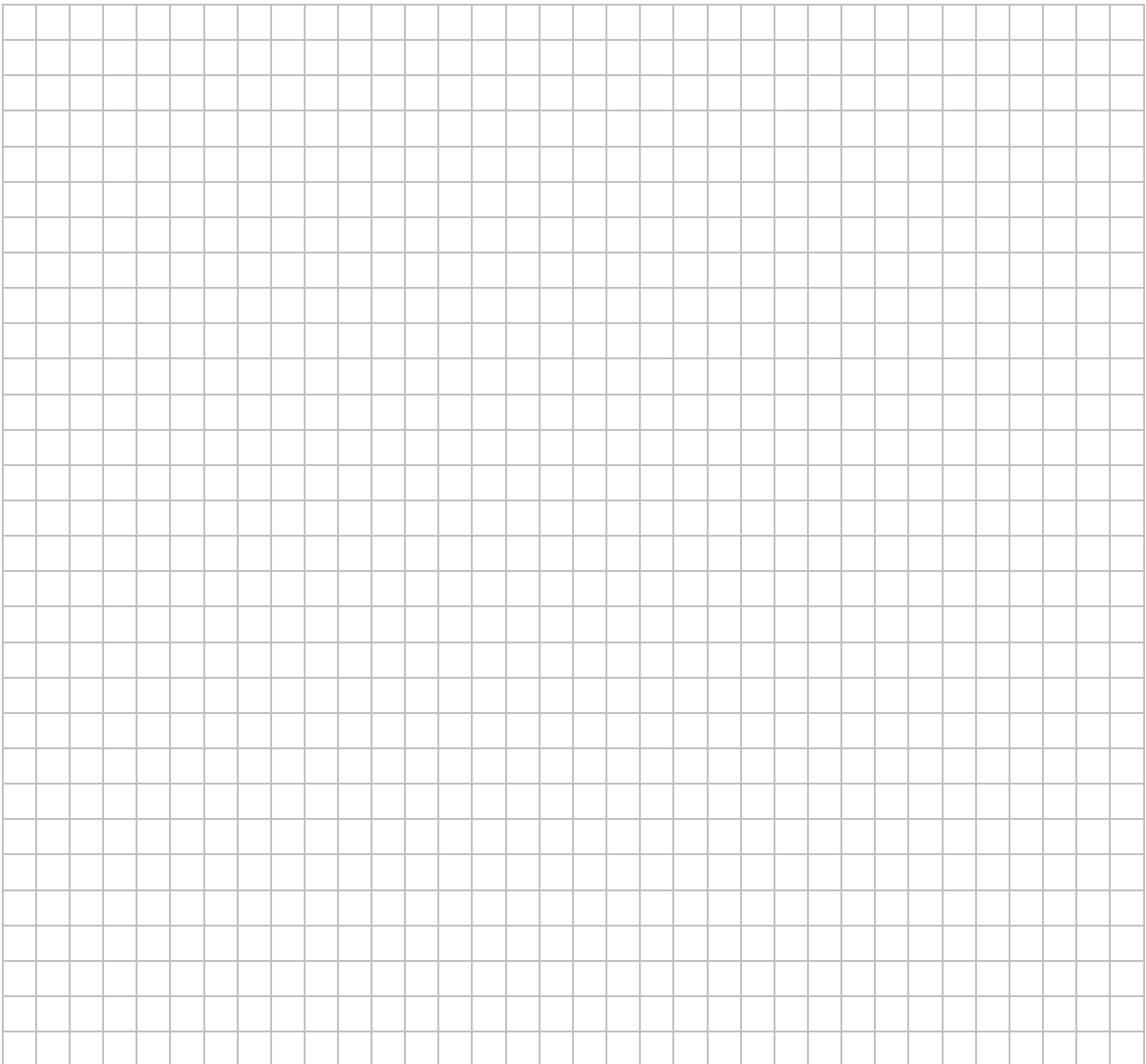
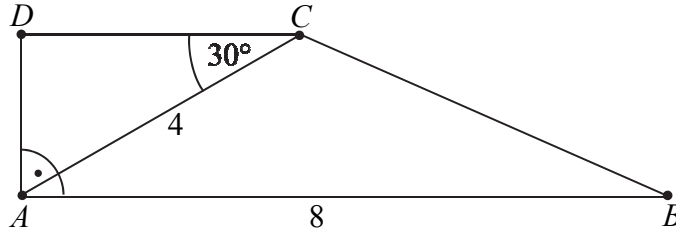
Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest liczbą nieparzystą.



Odpowiedź:

Zadanie 31. (2 pkt)

W trapezie prostokątnym $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość 8. Przekątna AC tego trapezu ma długość 4 i tworzy z krótszą podstawą trapezu kąt o mierze 30° (zobacz rysunek). Oblicz długość przekątnej BD tego trapezu.



Odpowiedź:

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	30.	31.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

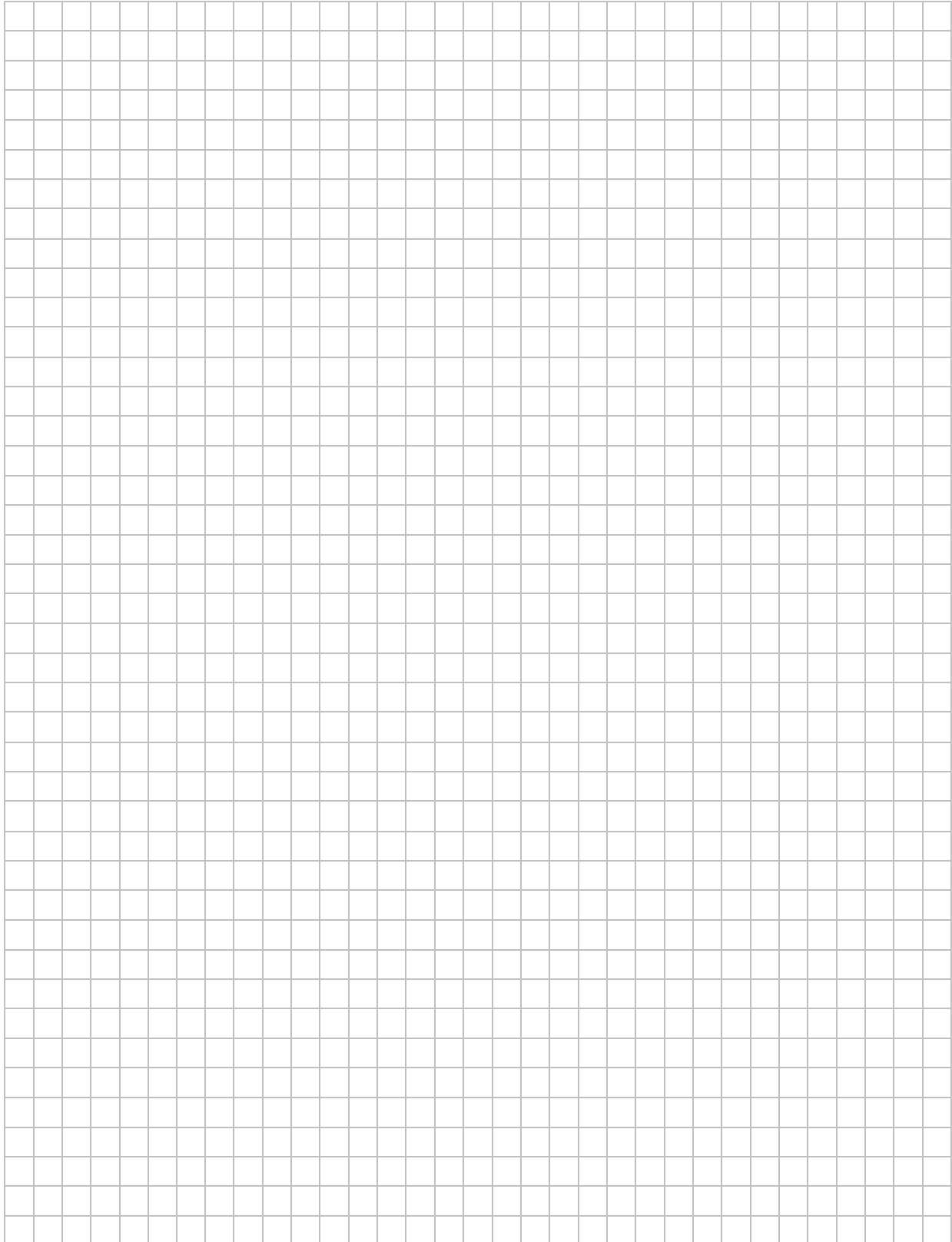
Zadanie 32. (4 pkt)

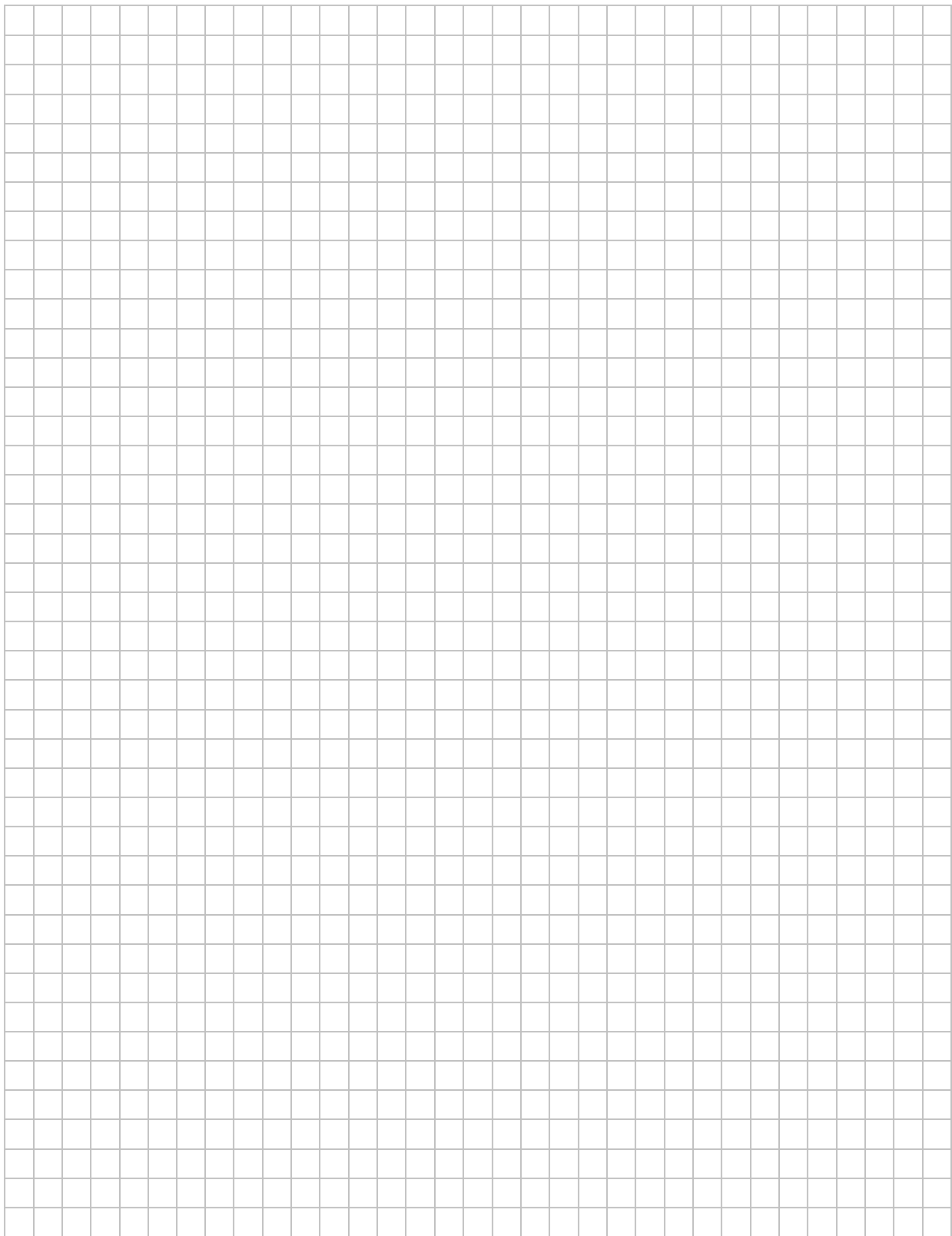
Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Różnicą tego ciągu jest liczba $r = -4$, a średnia arytmetyczna początkowych sześciu wyrazów tego ciągu:

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, jest równa 16.

a) Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

b) Oblicz liczbę k , dla której $a_k = -78$.



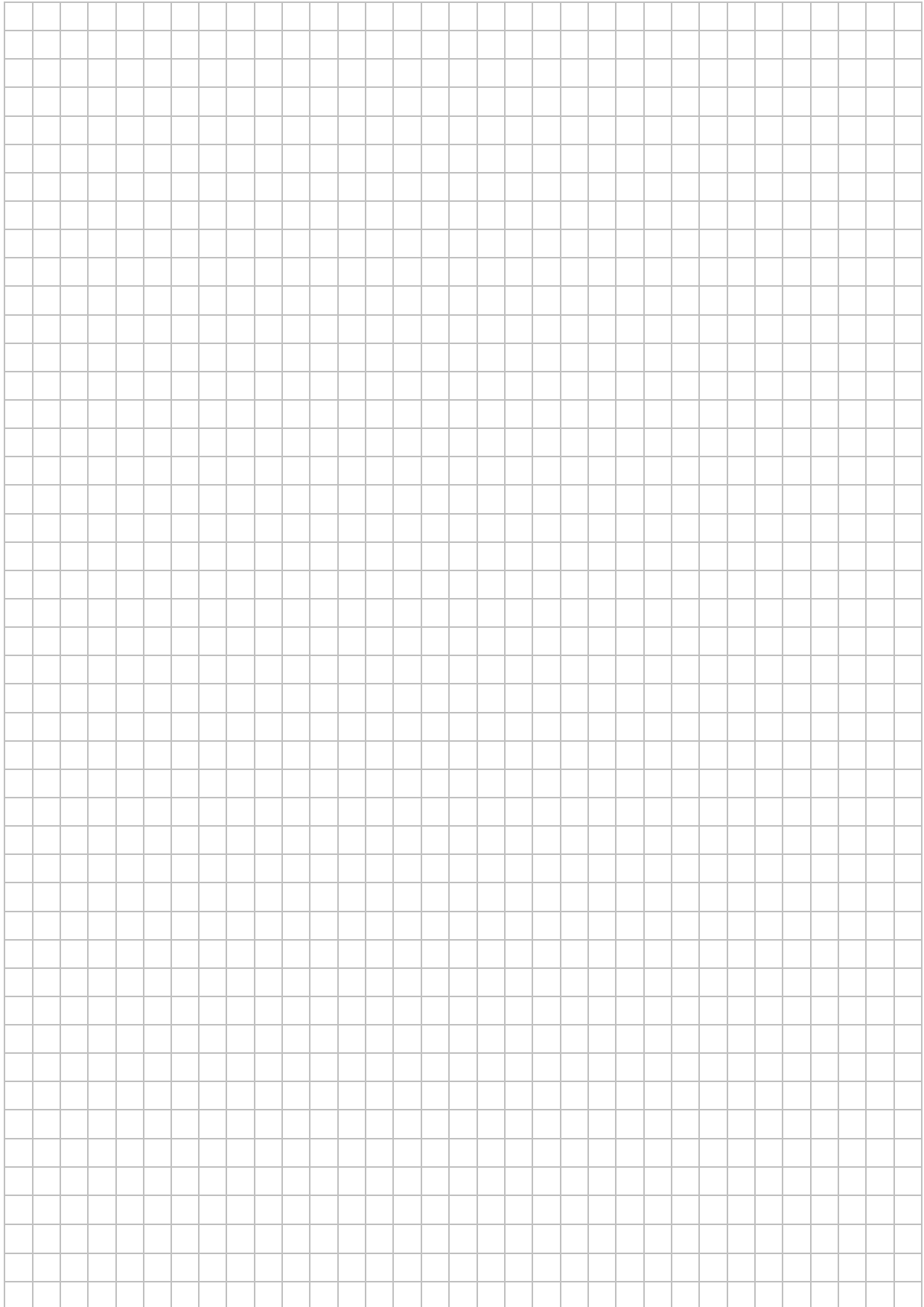


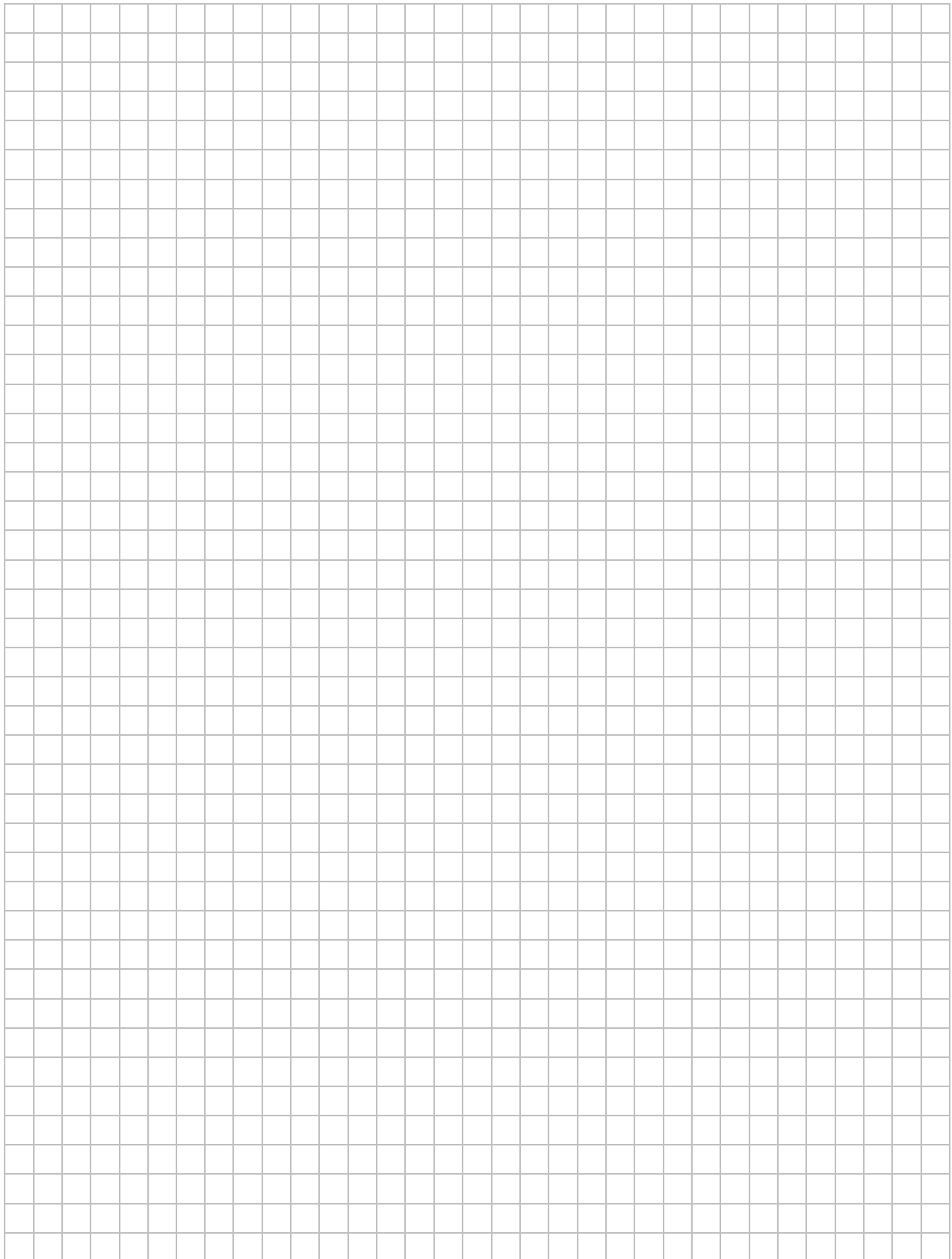
Odpowiedź:

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	32.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 33. (4 pkt)

Dany jest punkt $A = (-18, 10)$. Prosta o równaniu $y = 3x$ jest symetralną odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu B .



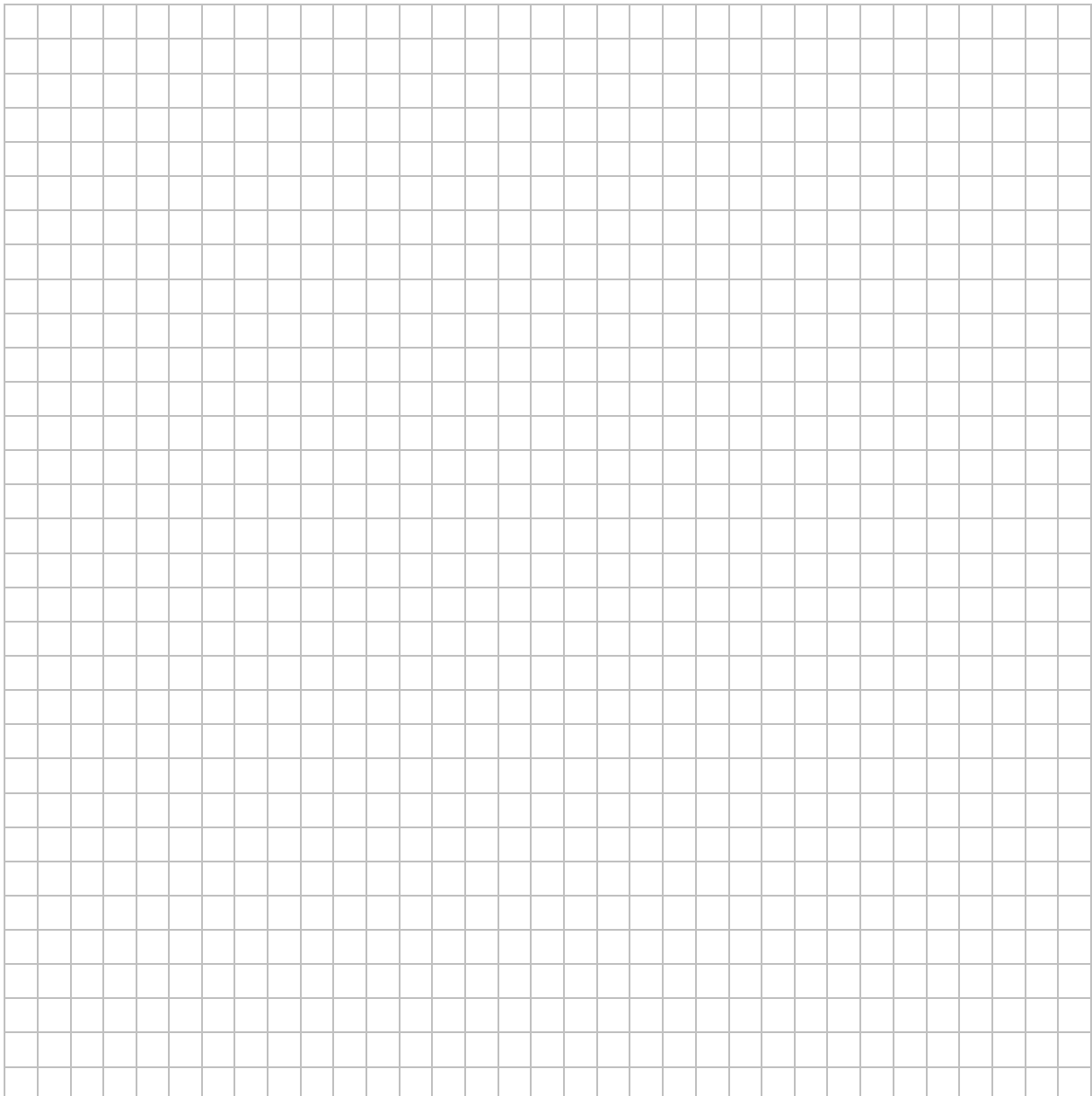
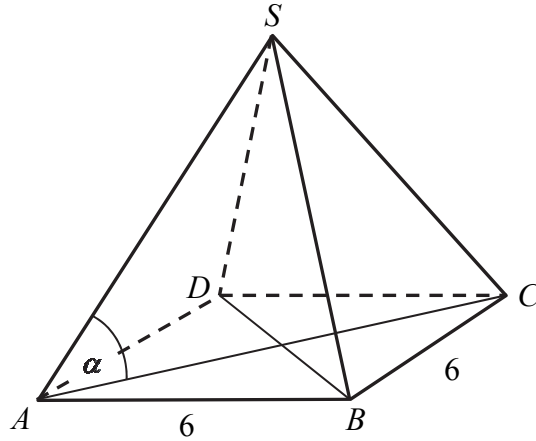


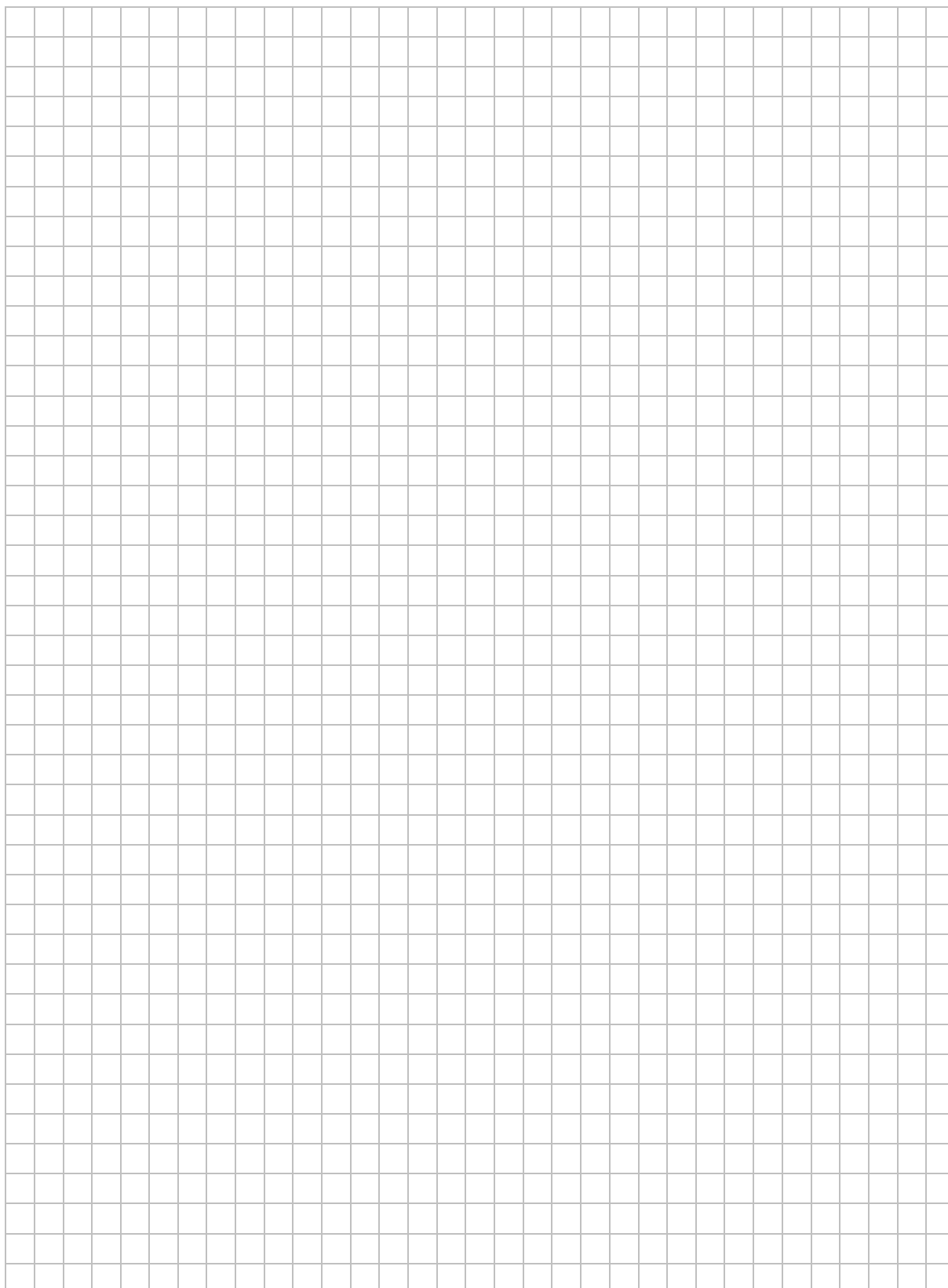
Odpowiedź:

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	33.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 34. (5 pkt)

Długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest cztery razy większe od pola jego podstawy. Kąt α jest kątem nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy (zobacz rysunek). Oblicz cosinus kąta α .





Odpowiedź:

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	34.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2018/2019**

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

FORMUŁA DO 2014

(„STARA MATURA”)

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-P1

MAJ 2019

Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający zna definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.h).	Wersja I	Wersja II
		A	D

Zadanie 2. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych (1.g).	Wersja I	Wersja II
		B	C

Zadanie 3. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje pojęcie procentu i punktu procentowego w obliczeniach (1.d).	Wersja I	Wersja II
		B	A

Zadanie 4. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający planuje i wykonuje obliczenia na liczbach rzeczywistych (1.a).	Wersja I	Wersja II
		D	C

Zadanie 5. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (8.d).	Wersja I	Wersja II
		B	A

Zadanie 6. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych (3.e).	Wersja I	Wersja II
		C	A

Zadanie 7. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej (4.g).	Wersja I	Wersja II
		C	B

Zadanie 8. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę i zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja rośnie, maleje, ma stały znak (4.b).	Wersja I	Wersja II
		C	D

Zadanie 9. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym (4.k).	Wersja I	Wersja II
		D	A

Zadanie 10. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający podaje równanie prostej w postaci $Ax + By + C = 0$ lub $y = ax + b$, mając dane dwa jej punkty lub jeden punkt i współczynnik a w równaniu kierunkowym (8.b).	Wersja I	Wersja II
		D	B

Zadanie 11. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).	Wersja I	Wersja II
		A	B

Zadanie 12. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).	Wersja I	Wersja II
		A	C

Zadanie 13. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego (6.d).	Wersja I	Wersja II
		D	A

Zadanie 14. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający korzysta ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu (7.a).	Wersja I	Wersja II
		A	D

Zadanie 15. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym (7.b).	Wersja I	Wersja II
		C	B

Zadanie 16. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym (7.c).	Wersja I	Wersja II
		A	D

Zadanie 17. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.c).	Wersja I	Wersja II
		D	B

Zadanie 18. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.c).	Wersja I	Wersja II
		B	C

Zadanie 19. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej (4.f).	Wersja I	Wersja II
--	---	-----------------	------------------

Zadanie 20. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległości punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej (8.e).	Wersja I	Wersja II
		C	D

Zadanie 21. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).	Wersja I	Wersja II
		B	B

Zadanie 22. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).	Wersja I	Wersja II
		D	D

Zadanie 23. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe danych; interpretuje te parametry dla danych empirycznych (10.a).	Wersja I	Wersja II
		B	C

Zadanie 24. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych; stosuje zasadę mnożenia (10.b).	Wersja I	Wersja II
		C	D

Zadanie 25. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).	Wersja I	Wersja II
		A	B

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 26. (0–2)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki (3.d).
--	--

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $x = 3$ lub $x = -3$, lub $x = 5$.

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy

- zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu:
 $(x^2 - 9)(x - 5) = 0$ lub $(x - 3)(x + 3)(x - 5) = 0$

albo

- podzieli wielomian $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$ przez dwumian $x - 5$, otrzyma iloraz $x^2 - 9$,

albo

- podzieli wielomian $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$ przez dwumian $x - 3$, otrzyma iloraz $x^2 - 2x - 15$,

albo

- podzieli wielomian $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$ przez dwumian $x + 3$, otrzyma iloraz $x^2 - 8x + 15$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Uwaga

Jeżeli zdający w trakcie doprowadzania lewej strony równania do postaci iloczynu popełni więcej niż jedną usterkę, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zapisujemy lewą stronę równania w postaci iloczynowej, stosując metodę grupowania wyrazów

$$x^2(x-5) - 9(x-5) = 0 \text{ lub } x(x^2-9) - 5(x^2-9) = 0$$

Stąd $(x^2 - 9)(x - 5) = 0$, czyli $(x - 3)(x + 3)(x - 5) = 0$.

Zatem $x = 3$ lub $x = -3$, lub $x = 5$.

II sposób

Stwierdzamy, że liczba 5 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$. Dzielimy wielomian przez dwumian $x - 5$. Otrzymujemy iloraz $x^2 - 9$. Zapisujemy równanie w postaci $(x^2 - 9)(x - 5) = 0$. Stąd $(x - 3)(x + 3)(x - 5) = 0$, czyli $x = 3$ lub $x = -3$, lub $x = 5$.

Uwaga

Zdający może ustalić, że pierwiastkiem wielomianu jest:

- liczba 3 i zapisać równanie w postaci $(x-3)(x^2-2x-15)=0$;
- liczba -3 i zapisać równanie w postaci $(x+3)(x^2-8x+15)=0$.

Zadanie 27. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów (3.a).
--	---

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, \frac{4}{3}) \cup (4, +\infty)$ lub $x \in (-\infty, \frac{4}{3}) \cup (4, +\infty)$, lub $x < \frac{4}{3} \vee x > 4$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Zdający otrzymuje 1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
 - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = \frac{4}{3}$ oraz $x_2 = 4$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności;
 - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji f określonej wzorem $f(x) = 3x^2 - 16x + 16$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności
- popełni błędy przy wyznaczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego $3x^2 - 16x + 16$, ale otrzyma dwa różne pierwiastki trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności.

Uwagi

1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $x < \frac{4}{3}$ i $x > 4$, $x < \frac{4}{3}$ oraz $x > 4$, itp.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 4$ i błędnie zapisze odpowiedź, np. $x \in (-\infty, -\frac{4}{3}) \cup (4, +\infty)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-\infty, 4) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$, $(+\infty, 4) \cup (\frac{4}{3}, -\infty)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego: $3x^2 - 16x + 16$.

Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej: $3x^2 - 16x + 16 > 0$.

Pierwszy etap rozwiązania może zostać zrealizowany następująco:

- obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $3x^2 - 16x + 16$
 - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
$$\Delta = 16 \cdot 16 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 4 \cdot 16 = 2^2 \cdot 4^2$$
 i stąd $x_1 = \frac{16-8}{6} = \frac{4}{3}$ oraz $x_2 = \frac{16+8}{6} = 4$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:
 $x_1 \cdot x_2 = \frac{16}{3}$ oraz $x_1 + x_2 = \frac{16}{3}$, stąd $x_1 = \frac{4}{3}$ oraz $x_2 = 4$.

Drugi etap rozwiązania.

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, \frac{4}{3}) \cup (4, +\infty)$ lub $x \in (-\infty, \frac{4}{3}) \cup (4, +\infty)$.

Zadanie 28. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający posługuje się wzorami skróconego mnożenia: $(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^3$, $a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3$ (2.a).
--------------------------------	--

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy

- zapisze nierówność w postaci, zawierającej po jednej stronie 0, a po drugiej sumę wyrażeń algebraicznych, będących wielokrotnościami kwadratów liczb lub stanowiących jedną stronę wzoru skróconego mnożenia, którego druga strona jest kwadratem, np.:

$$2a^2 + a^2 - 2ab + b^2 + 2b^2 \geq 0$$

albo

- zapisze oszacowanie $3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2$,

albo

- obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego w zależności od zmiennej a lub b , występującego po jednej stronie nierówności, gdy po drugiej stronie jest 0, i stwierdzi, że jest on niedodatni,

albo

- rozważy dwa przypadki: w pierwszym stwierdza, że gdy $ab \leq 0$, to nierówność jest prawdziwa, a drugim doprowadza nierówność do postaci $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{2}{3}$,

albo

- rozważy dwa przypadki: w jednym dzieli stronami nierówność przez b^2 lub przez a^2 , a w drugim przyjmuje, że a lub b jest równe 0, oraz w przypadku, w którym dzieli stronami nierówność i obliczy wyróżnik otrzymanego trójmianu kwadratowego,

albo

- zapisze, że prawdziwa jest nierówność $2a^2 + 2b^2 \geq 0$ oraz zapisze, że prawdziwa jest nierówność $(a-b)^2 \geq 0$ i przedstawi tę nierówność w postaci równoważnej $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$,

albo

- wskaże, że przeprowadza dowód nie wprost, zapisze nierówność $3a^2 - 2ab + 3b^2 < 0$ oraz zapisze jeden z dwóch poniższych komentarzy:
 - nierówność $(a-b)^2 < 0$ jest nieprawdziwa;
 - nierówność $(a-b)^2 \geq 0$ jest prawdziwa oraz nierówność $2a^2 + 2b^2 < 0$ jest nieprawdziwa

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Uwagi

1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości a i b , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający zakończy rozumowanie, zapisując nierówność $2a^2 + (a-b)^2 + 2b^2 \geq 0$ lub $\left(a - \frac{1}{3}b\right)^2 + \frac{8}{9}b^2 \geq 0$ i nie przedstawi komentarza uzasadniającego przyjmowanie wyłącznie nieujemnych wartości przez wyrażenie zapisane po lewej stronie nierówności, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający w IV sposobie rozwiązania pominie przypadek $b=0$ lub $a=0$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający w V sposobie rozwiązania pominie przypadek $ab \leq 0$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, o ile wykaże prawdziwość nierówności w przypadku $ab > 0$.
5. Jeżeli zdający po uzasadnieniu prawdziwości nierówności $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ zapisze nierówność $3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0$ i na tym zakończy, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przekształcamy równoważnie nierówność i otrzymujemy kolejno:

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0,$$

$$2a^2 + a^2 - 2ab + b^2 + 2b^2 \geq 0,$$

$$2a^2 + (a-b)^2 + 2b^2 \geq 0.$$

Lewa strona nierówności jest sumą trzech liczb nieujemnych: $2a^2$ – jako wielokrotność kwadratu liczby, $(a-b)^2$ – jako kwadrat liczby, $2b^2$ – jako wielokrotność kwadratu liczby.

Zatem z lewej strony nierówności występuje wyrażenie przyjmujące wartość nieujemną, czyli nierówność jest prawdziwa dla dowolnych rzeczywistych liczb a i b .

To kończy dowód.

Uwaga

Całe rozumowanie można zapisać w postaci

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0,$$

co jest prawdą dla dowolnych liczb rzeczywistych a , b .

II sposób

Przekształcamy równoważnie nierówność i otrzymujemy kolejno:

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0,$$

$$a^2 - \frac{2}{3}ab + b^2 \geq 0,$$

$$\left(a - \frac{1}{3}b\right)^2 - \frac{1}{9}b^2 + b^2 \geq 0,$$

$$\left(a - \frac{1}{3}b\right)^2 + \frac{8}{9}b^2 \geq 0.$$

Lewa strona nierówności jest sumą dwóch liczb nieujemnych: $\left(a - \frac{1}{3}b\right)^2$ – jako kwadrat liczby,

$\frac{8}{9}b^2$ – jako wielokrotność kwadratu liczby.

Zatem z lewej strony nierówności występuje wyrażenie przyjmujące wartość nieujemną, czyli nierówność jest prawdziwa dla dowolnych rzeczywistych liczb a i b .

To kończy dowód.

III sposób

Wyrażenie z lewej strony jest trójmianem kwadratowym dla zmiennej a , z parametrem b .

Obliczamy wyróżnik tego trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = (-2b)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3b^2 = 4b^2 - 36b^2 = -32b^2.$$

Obliczony wyróżnik trójmianu kwadratowego jest niedodatni dla dowolnej liczby rzeczywistej b . Zatem trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków lub ma jeden pierwiastek rzeczywisty. Przy najwyższej potędze trójmianu kwadratowego stoi liczba dodatnia 3, zatem lewa strona nierówności przyjmuje wartość nieujemną dla dowolnej zmiennej rzeczywistej a . Oznacza to, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnych rzeczywistych liczb a i b .

To kończy dowód.

IV sposób

Rozważmy dwa przypadki.

1. $b = 0$
2. $b \neq 0$

W pierwszym przypadku otrzymujemy nierówność $3a^2 \geq 0$, która jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej a , bo wyrażenie po lewej stronie jest wielokrotnością kwadratu liczby. Zatem nierówność $3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0$ jest prawdziwa w przypadku, gdy $b = 0$.

W drugim przypadku możemy podzielić obie strony nierówności $3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0$ przez b^2 .

Otrzymujemy nierówność: $3\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\frac{a}{b} + 3 \geq 0$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego zmiennej x , gdzie $x = \frac{a}{b}$, występującego z lewej strony nierówności:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 4 - 36 = -32.$$

Obliczony wyróżnik trójmianu kwadratowego jest ujemny, zatem trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych. Przy najwyższej potędze trójmianu kwadratowego stoi liczba dodatnia 3, zatem lewa strona nierówności przyjmuje zawsze wartość dodatnią. Oznacza to, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby a i dowolnej liczby b różnej od zera.

Z rozważonych dwóch przypadków wynika, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnych rzeczywistych liczb a i b .

To kończy dowód.

V sposób (przypadki ze względu na znak ab).

Rozważmy dwa przypadki.

1. Gdy $ab \leq 0$. Wtedy nierówność $3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0$ jest prawdziwa, gdyż po jej lewej stronie jest suma trzech nieujemnych składników $3a^2$, $-2ab$, $3b^2$.

2. Gdy $ab > 0$. Wtedy nierówność zapisujemy w postaci równoważnej $3a^2 + 3b^2 \geq 2ab$.

Obie strony tej nierówności możemy wtedy podzielić przez dodatnią liczbę $3ab$, otrzymując nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{2}{3}.$$

Z twierdzenia o sumie liczby dodatniej i jej odwrotności wynika, że $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 > \frac{2}{3}$.

To kończy dowód.

VI sposób (dowód nie wprost)

Załóżmy, nie wprost, że dla pewnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 < 0 .$$

Ponieważ $2a^2 + 2b^2 \geq 0$, więc nierówność ta byłaby prawdziwa tylko wtedy, gdyby $a^2 - 2ab + b^2 < 0$, czyli $(a - b)^2 < 0$, co jest nieprawdą.

Otrzymana sprzeczność oznacza, że nierówność $3a^2 - 2ab + 3b^2 < 0$ jest fałszywa.

Prawdziwa zatem jest nierówność $3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0$.

To kończy dowód.

VII sposób

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b prawdziwe są nierówności

$$(a - b)^2 \geq 0 \text{ oraz } 2a^2 + 2b^2 \geq 0 ,$$

czyli

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \text{ oraz } 2a^2 + 2b^2 \geq 0 .$$

Dodając te nierówności stronami, co możemy zrobić, gdyż nierówności są tak samo skierowane, otrzymujemy

$$a^2 - 2ab + b^2 + 2a^2 + 2b^2 \geq 0 ,$$

czyli

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0 .$$

To kończy dowód.

Zadanie 29. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym (7.c).
--------------------------------	--

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy wykorzysta równość kątów przy podstawie w trójkątach równoramiennych BCS i ABS oraz

- zapisze zależność między kątami α i ABS , np.: $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS| = 2\alpha$

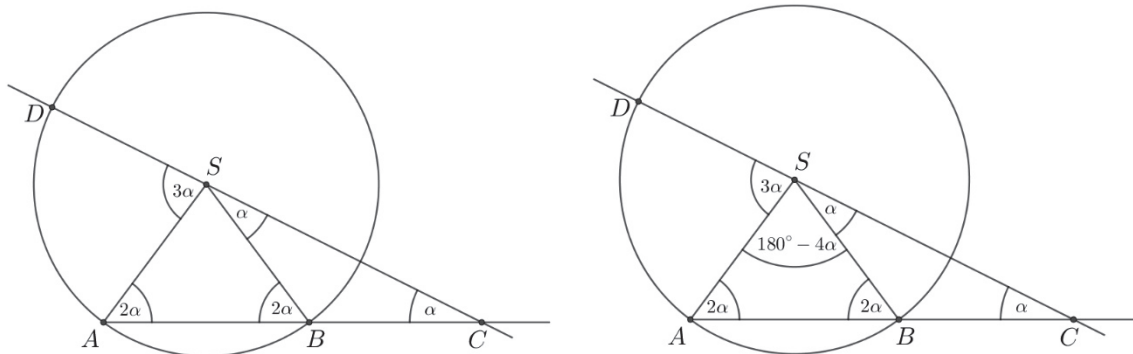
albo

- zapisze zależność między kątami α , DSA oraz dowolnym kątem trójkąta ABS w postaci układu dwóch równań z trzema niewiadomymi, np.: $\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ$ i $\beta = 180^\circ - 4\alpha$

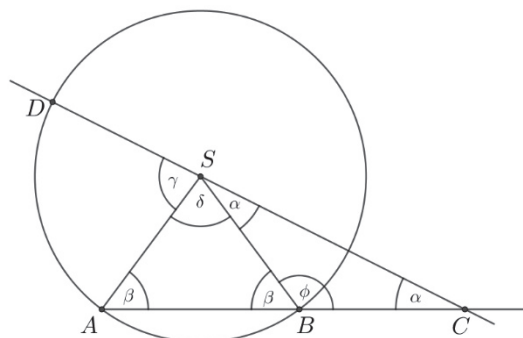
i na tym zakończy lub dalej popelni błędy.

Uwagi

1. Rozwiązanie uznajemy za pełne, jeżeli z zapisów zdającego wynikają kolejne kroki rozumowania.
2. Jeżeli zdający zaznaczy na rysunku zależności między kątami, ale nie opatrzy rozwiązania stosownym wyjaśnieniem, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**. Tego typu sytuacje ilustrują poniższe rysunki.



3. Jeżeli zdający zaznaczy na rysunku kąty trójkątów BCS , ABS i kąt ASD i na tym poprzestanie, to otrzymuje **0 punktów**. Tę sytuację ilustruje poniższy rysunek.



4. Jeżeli zdający przyjmuje konkretne miary kątów, to otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe rozwiązanie

Z założenia trójkąt CSB jest równoramienny i $|BS| = |BC|$, więc $|\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle BCS|$. Zatem $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle ACS| = \alpha$. Wynika stąd, że $|\sphericalangle CBS| = 180^\circ - 2\alpha$, a więc $|\sphericalangle ABS| = 2\alpha$. Ponieważ trójkąt ABS jest równoramienny i $|AS| = |BS|$, więc $|\sphericalangle BAS| = 2\alpha$.

Zatem $|\sphericalangle ASB| = 180^\circ - 4\alpha$.

Zauważmy, że

$$|\sphericalangle ASD| + |\sphericalangle ASB| + |\sphericalangle BSC| = 180^\circ.$$

Otrzymujemy zatem równanie

$$|\sphericalangle ASD| + 180^\circ - 4\alpha + \alpha = 180^\circ,$$

skąd wynika, że

$$|\sphericalangle ASD| = 3\alpha.$$

To kończy dowód.

Zadanie 30. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).
--------------------------------	--

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{9}{25}$.

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 5^2 = 25$

albo

- obliczy (zaznaczy poprawnie w tabeli) liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 9$ i nie wskazuje przy tym niepoprawnych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A ,

albo

- zapisze przy stosowaniu drzewa probabilistycznego na dwóch etapach prawdopodobieństwa potrzebne do wyznaczenia końcowego wyniku oraz wskaże wszystkie sytuacje sprzyjające rozważanemu zdarzeniu,

albo

- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełni błąd przy wypisywaniu par i wypisze o jedną za mało lub o jedną za dużo, ale nie wypisze żadnej niewłaściwej i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$ lub $P(A) < 0$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**, o ile końcowy wynik nie jest skutkiem błędu w działaniach na ułamkach.
3. Jeżeli zdający stosuje drzewo probabilistyczne, w którym przynajmniej pięć gałęzi odpowiada sytuacjom sprzyjającym rozważanemu zdarzeniu, i zdający pominie jedną z takich gałęzi, to może otrzymać **1 punkt**, jeśli doprowadzi rozumowanie do końca.
4. Jeżeli zdający zapisze tylko: $P(A) = \frac{9}{25}$, to otrzymuje **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający zapisze tylko: $|A| = 9$, $|\Omega| = 25$, $P(A) = \frac{9}{25}$, to otrzymuje **2 punkty**.
6. Jeżeli zdający zapisze prawdopodobieństwo $P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe rozwiązania

I sposób (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Zdarzeniami elementarnymi w przestrzeni Ω są wszystkie pary liczb (a, b) , gdzie $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Jest to model klasyczny. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25$.

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A polegającym na otrzymaniu liczb, których iloczyn jest liczbą nieparzystą, np. wypisując je i zliczając:

$$A = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}.$$

Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest więc równa 9.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe: $P(A) = \frac{9}{25}$.

II sposób (metoda tabeli)

(1,1) (1,2) **(1,3)** (1,4) **(1,5)**
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5)
(3,1) (3,2) **(3,3)** (3,4) **(3,5)**
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5)
(5,1) (5,2) **(5,3)** (5,4) **(5,5)**

Wszystkie zdarzenia elementarne możemy przedstawić w postaci kwadratowej tablicy.

albo

	1	2	3	4	5
1	X		X		X
2					
3	X		X		X
4					
5	X		X		X

Stąd $|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25$

Jest to model klasyczny.

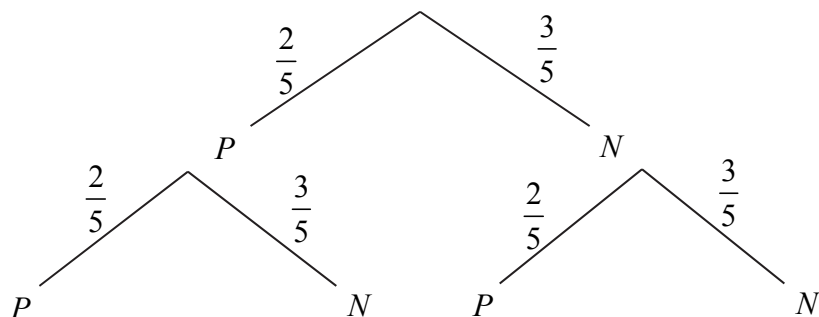
Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu A są pary liczb, których iloczyn jest liczbą nieparzystą. Są to wszystkie pary liczb wyróżnione w pierwszej tablicy lub zaznaczone w drugiej.

Jest ich 9. Zatem $P(A) = \frac{9}{25}$.

III sposób (metoda drzewka)

Przedstawiamy model graficzny doświadczenia.

P – oznacza liczbę parzystą, N – nieparzystą.



Iloczyn dwóch liczb naturalnych jest nieparzysty, jeśli obie liczby są nieparzyste. W rozważanym doświadczeniu, by zaszło interesujące nas zdarzenie, musimy wylosować dwie liczby nieparzyste. Do wyznaczenia poszukiwanego prawdopodobieństwa wystarczy zatem wymnożyć liczby z gałęzi narysowanego drzewa, odpowiadające sytuacji: $N-N$.

$$\text{Czyli } P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}.$$

Zadanie 31. (0–2)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym. (7.c).
-----------------------------------	---

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 2 p.
 gdy obliczy długość przekątnej BD trapezu: $|BD| = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$.

Zdający otrzymuje 1 p.
 gdy zapisze wysokość trapezu: $|AD| = 2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Uwagi

1. Jeżeli zdający przy wyznaczaniu wysokości trapezu popełni błąd polegający na niepoprawnym zastosowaniu definicji funkcji trygonometrycznej lub niewłaściwym zinterpretowaniu zależności między długościami boków w trójkącie „ 30° , 60° , 90° ”, lub zastosowaniu niewłaściwego wzoru z sinusem kąta na pole trójkąta, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeśli zdający przedstawi poprawny sposób obliczenia wysokości trapezu, popełni błąd przy wyznaczaniu tej wysokości, ale otrzyma jako wysokość trapezu liczbę dodatnią, to może otrzymać **1 punkt**, za konsekwentne wyznaczenie długości przekątnej BD .

Przykładowe rozwiązanie

Ponieważ $|\sphericalangle ACD| = 30^\circ$, więc trójkąt ACD jest połową trójkąta równobocznego. Zatem

$$|AD| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

Trójkąt ABD jest prostokątny, więc możemy wykorzystać zależność z twierdzenia Pitagorasa

$$|BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2.$$

Stąd otrzymujemy

$$|BD|^2 = 2^2 + 8^2 = 68.$$

Zatem

$$|BD| = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

Uwaga

Wysokość $|AD|$ trapezu można wyznaczyć także innymi metodami.

1. Z pola trójkąta ABC , wyznaczonego na dwa sposoby, np.: $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot |AD|$.
2. Z funkcji trygonometrycznej kąta w trójkącie ACD , np.: $\frac{|AD|}{|AC|} = \sin 30^\circ$.

Zadanie 32. (0–4)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).
--------------------------------	--

Schemat punktowania

Rozwiązanie pełne 4 p.
Zdający obliczy k : $k = 27$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą k , które wynika ze wzoru na k -ty wyraz ciągu arytmetycznego: $26 + (k - 1) \cdot (-4) = -78$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.
Zdający obliczy pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego: $a_1 = 26$ i na tym zakończy lub w dalszej części rozwiązania stosuje niepoprawny wzór na wyraz a_k .

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.
Zdający

- zapisze równanie $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{6} = 16$

albo

- wykorzysta wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisze wszystkie wyrazy: a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 , w zależności od a_1 i r np.: $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_1 + 2r$, $a_4 = a_1 + 3r$, $a_5 = a_1 + 4r$, $a_6 = a_1 + 5r$,

albo

- zapisze, że $S_6 = 6 \cdot 16$,

albo

- zastosuje wzór na sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i wyznaczy S_6 w zależności od a_1 i r : $S_6 = \frac{2a_1 + 5r}{2} \cdot 6$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **3 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania, a uzyskana liczba k jest całkowita dodatnia.
2. Jeżeli zdający popełnia błąd w interpretacji średniej arytmetycznej i poprawnie stosuje wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający popełnia błąd w interpretacji średniej arytmetycznej i poprawnie stosuje wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

4. Jeżeli zdający poprawnie interpretuje średnią arytmetyczną i popełnia błąd we wzorze na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
5. Jeżeli zdający poprawnie interpretuje średnią arytmetyczną i popełnia błąd we wzorze na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
6. Jeżeli zdający popełnia błąd w interpretacji średniej arytmetycznej i popełnia błąd we wzorze na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
7. Jeżeli zdający poprawnie obliczy $a_1 = 26$, a następnie zapisze $k = 27$, to otrzymuje **4 punkty**.
8. Jeżeli zdający stosuje metodę prób i błędów, sprawdzając, czy otrzymany ciąg spełnia warunki zadania (suma sześciu początkowych wyrazów jest równa 96 lub ich średnia arytmetyczna jest równa 16) i zapisze poprawny ciąg: 26, 22, 18, 14, 10, 6 oraz zapisze $a_1 = 26$ i $k = 27$, to otrzymuje **4 punkty**.
9. Jeżeli zdający stosuje metodę prób i błędów, sprawdzając, czy otrzymany ciąg spełnia warunki zadania (suma sześciu początkowych wyrazów jest równa 96 lub ich średnia arytmetyczna jest równa 16) i zapisze poprawny ciąg: 26, 22, 18, 14, 10, 6 oraz zapisze $a_1 = 26$ albo $k = 27$, to otrzymuje **2 punkty**.
10. Jeżeli zdający od razu zapisze poprawny ciąg: 26, 22, 18, 14, 10, 6 oraz zapisze $k = 27$, ale z zapisów zdającego nie można wywnioskować, że dokonuje sprawdzenia, czy podany ciąg spełnia warunki zadania, to otrzymuje **1 punkt**.
11. Jeżeli zdający jedynie zapisze $a_1 = 26$ i $k = 27$, to otrzymuje **0 punktów**.
12. Jeżeli zdający poprawnie obliczy a_1 , a w drugiej części rozwiązania zapisze równanie z niewiadomą k i popełni jeden błąd polegający na wpisaniu: zamiast liczby -78 liczby 78 albo zamiast liczby -4 liczby 4, albo zamiast liczby 26 liczby -26 , to może otrzymać **1 punkt** za drugi etap.
13. Jeżeli zdający nie zapisuje, że korzysta z sumy sześciu początkowych wyrazów ciągu, a rozpoczyna rozwiązanie od zapisania zależności $\frac{a_3 + a_4}{2} = 16$ bez stosownych objaśnień, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

Przykładowe rozwiązanie

Z treści zadania otrzymujemy

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{6} = 16,$$
$$\frac{a_1 + a_1 + (-4) + a_1 + 2 \cdot (-4) + a_1 + 3 \cdot (-4) + a_1 + 4 \cdot (-4) + a_1 + 5 \cdot (-4)}{6} = 16,$$
$$\frac{6a_1 - 60}{6} = 16,$$
$$a_1 = 26.$$

W celu obliczenia liczby k stosujemy wzór na wyraz a_k i otrzymujemy:

$$26 + (k - 1) \cdot (-4) = -78, \text{ a stąd } k = 27.$$

Odpowiedź: $a_1 = 26$, $k = 27$.

Zadanie 33. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający podaje równanie prostej w postaci $Ax + By + C = 0$ lub $y = ax + b$, mając dane dwa jej punkty lub jeden punkt i współczynnik a w równaniu kierunkowym (8.b). Zdający interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (8.d). Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka (8.f).
-----------------------------------	--

Schemat punktowania**Rozwiązanie pełne 4 p.**Zdający obliczy i zapisze współrzędne szukanego punktu B :

$$B = \left(\frac{102}{5}, -\frac{14}{5} \right).$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający:

- zapisze obie równości pozwalające obliczyć współrzędne szukanego punktu B , np.

$$\frac{-18 + x_B}{2} = \frac{6}{5} \quad \text{i} \quad \frac{10 + y_B}{2} = \frac{18}{5}$$

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, pozwalające obliczyć współrzędną szukanego punktu B , np.

$$\frac{|3x + \frac{x}{3} - 4|}{\sqrt{10}} = \frac{32\sqrt{10}}{5}$$

lub

$$\frac{|3(12 - 3y) - y|}{\sqrt{10}} = \frac{32\sqrt{10}}{5}$$

lub

$$3x - 64 = -\frac{1}{3}(x + 18) + 10$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający:

- wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = 3x$ i przechodzącej przez punkt $A = (-18, 10)$

$$y = -\frac{1}{3}x + 4$$

oraz obliczy odległość d punktu $A = (-18, 10)$ od prostej o równaniu $y = 3x$

$$d = \frac{32\sqrt{10}}{5}$$

albo

- obliczy współrzędne środka odcinka AB : $x = \frac{6}{5}$ i $y = \frac{18}{5}$,

albo

- wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = 3x$ i przechodzącej przez punkt $A = (-18, 10)$

$$y = -\frac{1}{3}x + 4$$

oraz wyznaczy równanie prostej przechodzącej przez punkt B i równoległej do symetralnej odcinka AB : $y = 3x - 64$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 p.

Zdający:

- wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = 3x$ i przechodzącej przez punkt $A = (-18, 10)$

$$y = -\frac{1}{3}x + 4$$

albo

- obliczy odległość d punktu $A = (-18, 10)$ od prostej o równaniu $y = 3x$

$$d = \frac{32\sqrt{10}}{5},$$

albo

- wyznaczy odległość punktu A od punktu należącego do symetralnej odcinka AB w zależności od jednej zmiennej, np.: $\sqrt{(x+18)^2 + (3x-10)^2}$,

albo

- wyznaczy współrzędne środka S odcinka AB w zależności od współrzędnych końca B odcinka AB : $S = \left(\frac{-18+x_B}{2}, \frac{10+y_B}{2}\right)$,

albo

- wyznaczy równanie prostej przechodzącej przez punkt B i równoległej do symetralnej odcinka AB : $y = 3x - 64$

Uwagi

1. Jeśli zdający popełni błędy rachunkowe, które nie przekreślają poprawności rozumowania i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **3 punkty**.
2. Jeżeli jedynym błędem jest:
 - a) błąd przy ustalaniu współczynnika kierunkowego prostej AB , to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie;
 - b) błąd przy wyznaczaniu b , polegający na zamianie miejscami współrzędnych punktu A , to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie;
 - c) błąd polegający na zamianie miejscami współrzędnych przy wyznaczaniu środka S , to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie;
 - d) błąd polegający na błędnym podstawieniu do wzoru na odległość punktu od prostej, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie;

e) błąd polegający na zastosowaniu niepoprawnego wzoru „ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ”, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = 3x$ i przechodzącej przez punkt A :

$$y = -\frac{1}{3}x + b.$$

Punkt A należy do prostej $y = -\frac{1}{3}x + b$, więc $10 = -\frac{1}{3}(-18) + b$. Stąd $b = 4$.

Obliczamy współrzędne punktu S przecięcia prostej $y = 3x$ i prostej AB :

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = -\frac{1}{3}x + 4 \end{cases}$$

Wtedy $3x = -\frac{1}{3}x + 4$.

Zatem

$$x = \frac{6}{5} \text{ i } y = \frac{18}{5}, \text{ czyli } S = \left(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}\right).$$

Ponieważ punkt S jest środkiem odcinka AB , więc

$$\frac{-18 + x_B}{2} = \frac{6}{5} \text{ i } \frac{10 + y_B}{2} = \frac{18}{5}.$$

Stąd $x_B = \frac{102}{5}$ i $y_B = -\frac{14}{5}$, czyli $B = \left(\frac{102}{5}, -\frac{14}{5}\right)$.

II sposób („odległość punktu od prostej”)

Równanie prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez punkt A ma postać:

$$y = -\frac{1}{3}x + b.$$

Wtedy $10 = -\frac{1}{3}(-18) + b$, stąd $b = 4$. Zatem równanie prostej AB ma postać: $y = -\frac{1}{3}x + 4$.

Punkt B należy do tej prostej, więc

$$B = (x, -\frac{1}{3}x + 4).$$

Obliczamy odległość punktu A od prostej o równaniu $y = 3x$:

$$\frac{|3 \cdot (-18) - 1 \cdot 10|}{\sqrt{10}} = \frac{32\sqrt{10}}{5}.$$

Ponieważ prosta o równaniu $y = 3x$ jest symetralną odcinka AB , więc odległość punktu

$B = (x, -\frac{1}{3}x + 4)$ od prostej o równaniu $y = 3x$ jest także równa $\frac{32\sqrt{10}}{5}$.

Zatem otrzymujemy równanie:

$$\frac{|3x + \frac{x}{3} - 4|}{\sqrt{10}} = \frac{32\sqrt{10}}{5}, \text{ stąd } |\frac{10}{3}x - 4| = 64.$$

Równanie to jest równoważne alternatywnie równań

$$\frac{10}{3}x - 4 = 64 \text{ lub } \frac{10}{3}x - 4 = -64.$$

Stąd

$$x = \frac{102}{5} \text{ lub } x = -18.$$

Obliczamy współrzędne punktu $B = \left(\frac{102}{5}, -\frac{14}{5}\right)$.

Uwaga

Zdający może **bez wyznaczenia** równania prostej $y = -\frac{1}{3}x + 4$, tj. prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = 3x$, na której leży punkt $A = (-18, 10)$, obliczyć odległość $d = \frac{32\sqrt{10}}{5}$ punktu $A = (-18, 10)$ od prostej o równaniu $y = 3x$ i zapisać równanie z jedną niewiadomą $\sqrt{(x+18)^2 + (3x-10)^2} = \frac{32\sqrt{10}}{5}$, z którego wyznaczy pierwszą współrzędną środka odcinka AB .

III sposób

Niech $B = (x, y)$ będzie końcem odcinka AB . Wtedy współrzędne środka S tego odcinka są równe

$$S = \left(\frac{-18+x}{2}, \frac{10+y}{2}\right).$$

Punkt ten leży na symetralnej odcinka AB , a więc na prostej o równaniu $y = 3x$, więc

$$\begin{aligned}\frac{10+y}{2} &= 3 \cdot \frac{-18+x}{2}, \\ y+10 &= 3x-54, \\ y &= 3x-64.\end{aligned}$$

Prosta prostopadła do prostej o równaniu $y = 3x$ i przechodząca przez punkt A ma równanie postaci

$$y = -\frac{1}{3}(x+18) + 10.$$

Punkt B należy do tej prostej, więc pozostaje rozwiązać układ równań $y = 3x - 64$

i $y = -\frac{1}{3}(x+18) + 10$. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}3x - 64 &= -\frac{1}{3}(x+18) + 10, \\ 3x - 74 &= -\frac{1}{3}x - 6, \\ \frac{10}{3}x &= 68, \\ x_B &= \frac{68 \cdot 3}{10} = \frac{34 \cdot 3}{5} = \frac{102}{5}.\end{aligned}$$

Zatem druga współrzędna punktu B jest równa $y = 3 \cdot \frac{102}{5} - 64 = -\frac{14}{5}$, czyli $B = \left(\frac{102}{5}, -\frac{14}{5}\right)$.

Uwaga

Równanie $y = 3x - 64$, które uzyskaliśmy w początkowym etapie rozwiązania to równanie prostej przechodzącej przez punkt B i równoległej do symetralnej odcinka AB . Równanie tej prostej możemy też otrzymać, korzystając ze wzoru na odległość między prostymi równoległymi oraz odległość punktu od prostej.

Punkt B leży po przeciwnej stronie symetralnej odcinka AB niż punkt A , na prostej m równoległej do tej symetralnej, przy czym odległość prostej m od symetralnej jest równa odległości punktu A od symetralnej. Prosta m ma więc równanie postaci $y = 3x + c$. Ponieważ odległość między prostą m i symetralną odcinka AB jest równa odległości punktu A od symetralnej odcinka AB , więc otrzymujemy równanie

$$\frac{|c-0|}{\sqrt{10}} = \frac{|3 \cdot (-18) - 10|}{\sqrt{10}},$$

Stąd $|c| = 64$, więc $c = -64$ lub $c = 64$.

Otrzymaliśmy zatem dwie proste o równaniach $y = 3x - 64$ oraz $y = 3x + 64$. Drugie z tych równań jest równaniem prostej przechodzącej przez punkt A , gdyż $3 \cdot (-18) + 64 = 10$, więc prosta m ma równanie postaci $y = 3x - 64$.

Zadanie 34. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający wskazuje i oblicza kąty między ścianami wielościanu, między ścianami i odcinkami oraz między odcinkami takimi jak krawędzie, przekątne, wysokości (9.a). Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).
-----------------------------------	--

Schemat oceniania**Rozwiązanie pełne 5 p.**Zdający obliczy cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.**Rozwiązanie prawie pełne 4 p.**

Zdający

- obliczy długość krawędzi bocznej ostrosłupa: $b = 3\sqrt{10}$

albo

- obliczy $\operatorname{tg}\alpha$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.Zdający obliczy wysokość ściany bocznej ostrosłupa: $h_b = 9$.

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze równanie pozwalające obliczyć wysokość ściany bocznej, np.:

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h_b = 108.$$

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- zapisze zależność pomiędzy polem powierzchni bocznej a polem podstawy ostrosłupa lub pomiędzy polem ściany bocznej a polem podstawy ostrosłupa, np.: $P_b = 3P_p$,

$$P_s = \frac{3}{4}P_p$$

albo

- zapisze dwa równania: $P_c = 4P_p$ i $P_c = P_p + P_b$,

albo

- obliczy pole powierzchni bocznej ostrosłupa: $P_b = 108$,

albo

- zapisze, że $\cos \alpha = \frac{|AO|}{|AS|}$,

albo

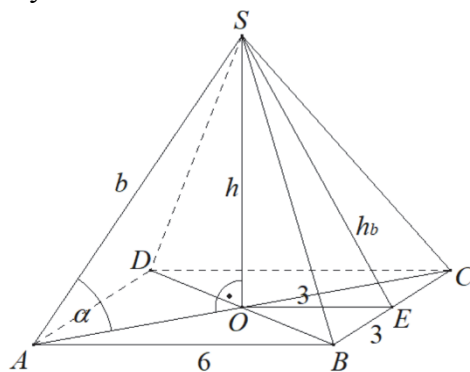
- obliczy długość przekątnej podstawy ostrosłupa lub połowę jej długości: $|AC| = 6\sqrt{2}$
lub $|AO| = 3\sqrt{2}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający popełni błędy rachunkowe lub przy przepisywaniu (nie dotyczy przepisywania wzorów z zestawu wzorów matematycznych), które nie przekreślają poprawności rozumowania i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **4 punkty**.
2. Jeżeli jedynym błędem jest:
 - a) przyjęcie niepoprawnej zależności między polami ścian ostrosłupa: $P_b = 4 \cdot P_p$,
 $P_s = 4 \cdot P_p$,
 - b) niepoprawne zastosowanie wzoru na pole trójkąta lub niepoprawne wyznaczenie pola kwadratu, lub niepoprawne wyznaczenie długości przekątnej kwadratu, lub niepoprawne zastosowanie definicji funkcji trygonometrycznej, ale niebędące skutkiem ujawnionego błędu rachunkowego,
 - c) niepoprawne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa,
 - d) zastosowanie niepoprawnego wzoru „ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ”,
 - e) przyjęcie obliczonej wysokości ściany bocznej jako wysokości ostrosłupa, to zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie popełnia innych błędów i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca.
3. Jeżeli zdający popełnia jeden błąd, opisany w uwadze 2. a ponadto popełnia błędy rachunkowe, ale poprawnie realizuje strategię rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający **przyjmuje** inne niż wymienione w uwadze 2a niepoprawne zależności między polami ścian ostrosłupa, to otrzymuje co najwyżej 1 pkt.
5. Jeżeli zdający poprawnie ustala zależności między polami ścian ostrosłupa, ale przy obliczaniu wysokości ściany bocznej ostrosłupa podstawia do wzoru niepoprawną wartość za pole, to otrzymuje co najwyżej 3 pkt, o ile nie popełni innych błędów i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca.
6. Jeżeli zdający przyjmuje, bez stosownych komentarzy lub obliczeń, długości odcinków w ostrosłupie, na przykład zapisuje, że wysokość ostrosłupa jest równa przekątnej podstawy lub przyjmuje, że wysokość ściany bocznej jest równa 9, to może otrzymać za całe rozwiązanie jedynie punkty za inne części rozwiązania, np.: za wyznaczenie długości przekątnej podstawy lub za wyznaczenie cosinusa kąta.

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Ze wzoru na długość przekątnej kwadratu otrzymujemy

$$|AO| = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Pole podstawy ostrosłupa jest równe

$$P_p = 6^2 = 36.$$

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest 4 razy większe od pola jego podstawy, więc

$$P_c = 4P_p = 4 \cdot 36 = 144.$$

Zatem pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe

$$P_b = P_c - P_p = 3 \cdot 36 = 108.$$

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe

$$P_b = 4 \cdot P_{BCS} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h_b = 12 \cdot h_b,$$

więc

$$12 \cdot h_b = 108,$$

$$h_b = 9.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BES otrzymujemy

$$b^2 = 3^2 + h_b^2 = 9 + 9^2 = 9 \cdot 10,$$

$$b = 3\sqrt{10}.$$

Z trójkąta AOS otrzymujemy

$$\cos \alpha = \frac{|AO|}{|AS|} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$